## Mulțimea numerelor reale

$\mathbb{R}$ este **corp total ordonat**, un număr real este o fracție zecimală finită sau infinită (cu excepția fracțiilor zecimale periodice având perioada 9). $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ este **densă**, adică $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 < r_2, \exists q \in \mathbb{Q}, r_1 < q < r_2$

**Axioma lui Arhimede** "$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $x \le ny$".

**Axioma Cantor-Dedekind** "Un şir de intervale închise care se includ şi a căror lungime tinde la 0 are intersecția formată din un punct". $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} l(I_n) = 0$ atunci $\bigcap\limits_n I_n = \{z\}$. Formulată prin şiruri: $a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_{n-1} \le a_n \le \ldots \le b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_1 \le b_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, există şi este unic $z \in \mathbb{R}$, $a_n \le z \le b_n$

## Şiruri, convergență, şir Cauchy (fundamental)

şir **monoton** crescător: $x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$; descrescător: $x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

şir **mărginit** $\exists M \in \mathbb{R}_+$ a.î. $|x_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$ sau $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $c_1 \le x_n \le c_2, \forall n \in \mathbb{N}$

şir **convergent** $x_n$ este convergent şi are limita x dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon$

**subşir** dacă $n_1 < n_2 < \ldots$ atunci $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$ se numeşte subşir (al şirului $x_n$)

şir **Cauchy** (fundamental).

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \ge n_\varepsilon$ sau, echivalent,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N}$

În mulțimea numerelor reale sunt adevărate următoarele afirmații

- orice şir mărginit conține un subşir convergent (lema lui Cesaro)
- orice şir Cauchy este marginit (in particular, conține un subşir convergent)
- un şir este convergent dacă şi numai dacă este Cauchy

## Infimum şi supremum, convergența şirurilor monotone şi mărginite.

*M* este un **majorant** al mulțimii A dacă $x \le M, \forall x \in A$ ( M mărgineşte superior mulțimea A )

*m* este un **minorant** al mulțimii A dacă $x \ge m, \forall x \in A$ ( m mărgineşte inferior mulțimea A )

**Supremumul** (marginea superioară) unei mulțimi este cel mai mic majorant, **infimumul** (marginea inferioară) este cel mai mare minorant.

**Teoremă**. Orice mulțime de numere reale mărginită superior posedă supremum; orice mulțime de numere reale mărginită inferior posedă infimum.

**Convergența şirurilor monotone** Un şir monoton crescător şi mărginit superior este convergent la supremumul mulțimii formate din elemetele şirului iar un şir monoton descrescător şi mărginit inferior este convergent la infimumul mulțimii formate din elemetele şirului

## Limitele subşirurilor, limită inferioară şi limită superioară

**Teoremă**. Orice subşir al unui şir convergent este de asemenea convergent şi are aceeaşi limită. Reciproc, dacă orice subşir al unui şir este convergent, atunci şirul este convergent

**Definiție**. $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \inf\limits_{n\ge k} x_n$ se numeşte limita inferioară a lui $x_n$; $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\ge k} x_n$ se numeşte limita superioară a lui $x_n$

**Observație** $\liminf x_n \le \limsup x_n$.

**Teoremă**. Şirul $x_n$ este convergent dacă şi numai dacă $\liminf x_n = \limsup x_n$

**Definiție** Se numeşte punct limită al unui şir, limita unui subşir al şirului $x_n$.

**Lemă**. Limita superioară şi limita inferioară a unui şir mărginit sunt puncte limită ale şirului

**Definiție**. Limită în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$x_n \to \infty$ dacă $\forall c > 0, \exists n_c$ a.î. $c < x_n, \forall n \ge n_c$

$x_n \to -\infty$ dacă $\forall c > 0, \exists n_c$ a.î. $x_n < -c, \forall n \ge n_c$

## Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de numere reale. Numim serie expresia infinită $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$ Şirul $s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ se numeşte şirul sumelor parțiale iar $x_n$ se numeşte termenul general. Dacă $s_n$ este convergent spunem că seria este convergentă iar limita se notează cu $\sum\limits_n x_n$.

**Observație**. Dacă $x_n > 0$ atunci $s_n$ este crescător deci este convergent dacă şi numai dacă este mărginit.

**Propoziție**. Dacă $s_n$ este convergent atunci $x_n \to 0$

**Consecință**. Dacă $x_n \not\to 0$ atunci $s_n$ nu este convergentă

**1.** Şirul $x_n=\frac{\cos 1}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\cos n}{n\cdot(n+1)}$ este convergent

**Demonstrație**. Utilizăm afirmația: **un şir este Cauchy dacă şi numai dacă este convergent**.

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots+\frac{\cos(n+p)}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right|\le\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)\cdot(n+p+1)}=$$

$\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]+\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]+\ldots+\left[\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\right]=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}\to 0, n\to\infty$, independent de $p$

**2.** Şirul $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ este convergent

**Demonstrație**. Utilizăm afirmația: **un şir monoton şi mărginit este convergent.** Pornim de la inegalitatea: $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$, deci $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n<0$ adică şirul este descrescător (în particular, mărginit superior). Demonstrăm că este mărginit inferior utilizând membrul drept al inegalității: $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+(\ln(n+1)-\ln n)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$

**3.** Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l$

**Demonstrație**. Utilizăm **Lema Stoltz Cesaro:** dacă $\lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$ şi $(b_n)$ este nemărginit şi monoton, atunci $\lim\frac{a_n}{b_n}=l$. Notăm $x_n=\ln\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{\ln|u_n|}{n}$ şi aplicăm **Lema**, $\frac{\ln|u_{n+1}|-\ln|u_n|}{n+1-n}=\ln\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to\ln l$, $\ln\sqrt[n]{|u_n|}\to\ln l$

**4.** **Seria geometrică**: $\sum\limits_{n\ge 0}q^n=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$ este convergentă pentru $q\in(-1,1)$ şi divergentă pentru $|q|\ge 1$

**Demonstrație**. Pentru $q=1$, $s_n=n\to\infty, n\to\infty$. Pentru $q\ne 1$, $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^n}{1-q}$ este convergent dacă şi numai dacă $|q|<1$ şi în acest caz $\sum\limits_{n\ge 0}q^n=\frac{1}{1-q}$

**5.** **Seria armonică**: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ este divergentă

**Demonstrație**. Grupăm: $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^k+2^k}\right)>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{k}=1+\frac{k+1}{2}$, adică $s_{2^{k+1}}>1+\frac{k+1}{2}\to\infty, k\to\infty$

**6.** **Seria armonică generalizată**: $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots,\alpha>0$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha>1$

**Demonstrație**. Fie $\alpha>1$, $\left(\frac{1}{\left(2^k\right)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{\left(2^k+2^k-1\right)^\alpha}\right)<2^k\cdot\frac{1}{\left(2^k\right)^\alpha}=\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k=q^k$, unde am notat $q=\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, $q\in(0,1)$.

Avem $s_{2^{k+1}-1}=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\left(2^k\right)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{\left(2^k+2^k-1\right)^\alpha}\right)<1+q+q^2+\ldots+q^k=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}<\frac{1}{1-q}$; deci şirul $(s_n)_n$ este mărginit deci convergent.

Pentru $\alpha=1$ am văzut deja că seria armonică este divergentă (nemărginită) iar pentru $\alpha<1$ utilizăm: $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\to\infty, n\to\infty$ deci seria armonică generalizată este divergentă.

**Criteriile de comparație** ale seriilor cu termeni pozitivi. Fie $\sum_n u_n$ , $\sum_n v_n$ două serii cu termeni pozitivi

**Criteriul I**. Dacă $\exists n_0, u_n \le v_n, \forall n \ge n_0$ atunci $\begin{cases} \text{dacă} \sum_n v_n \text{ convergentă, atunci} \sum_n u_n \text{ convergentă} \\ \text{dacă} \sum_n u_n \text{ divergentă, atunci} \sum_n v_n \text{ divergentă} \end{cases}$

**Criteriul II**. Dacă $\exists n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}, \forall n \ge n_0$ atunci $\begin{cases} \text{dacă} \sum_n v_n \text{ convergentă, atunci} \sum_n u_n \text{ convergentă} \\ \text{dacă} \sum_n u_n \text{ divergentă, atunci} \sum_n v_n \text{ divergentă} \end{cases}$

**Criteriul III**. Dacă $\exists \lim \frac{u_n}{v_n} = l, 0 < l < \infty$ atunci seriile au aceeaşi natură (convergente sau divergente).

**Criteriul rădăcinii (Cauchy)** Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\sqrt[n]{u_n} \le q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă pentru o infinitate de termeni avem $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$ atunci seria diverge

**Consecința 1** Dacă $\limsup \sqrt[n]{u_n} < 1$ atunci seria converge iar dacă $\limsup \sqrt[n]{u_n} > 1$ atunci seria diverge

**Consecința 2** Dacă $\lim \sqrt[n]{u_n} < 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim \sqrt[n]{u_n} > 1$ atunci seria diverge

**Observație utilă**. Dacă limitele din enunțul consecințelor sunt egale cu 1 atunci nu se poate afirma că seria este convergentă sau divergentă. <u>Cel mai adesea se utilizează Consecința 2</u>.

**Criteriul raportului (D'Alembert)** Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1, \forall n \ge n_0$ atunci seria diverge

**Consecința 1** Dacă $\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ atunci seria converge iar dacă $\liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ atunci seria diverge

**Consecința 2** Dacă $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ atunci seria diverge

**Observație utilă**. Dacă limitele din enunțul consecințelor anterioare sunt egale cu 1 atunci nu se poate afirma că seria este convergentă sau divergentă. <u>Cel mai adesea se utilizează Consecinţa 2</u>.

**Criteriul lui Raabe-Duhamel** Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \ge q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \le 1, \forall n \ge n_0$ atunci seria diverge

**Consecința 1** Dacă $\liminf n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$ atunci seria converge iar dacă $\limsup n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$ atunci diverge

**Consecința 2** Dacă $\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$ atunci seria diverge

**Observație utilă**. Dacă limitele din enunțul consecințelor de mai sus sunt egale cu 1 atunci nu se poate afirma că seria este convergentă sau divergentă. <u>Cel mai adesea se utilizează Consecința 2</u>.

Seria $\sum_{n\geq 1}\cos\frac{1}{n}$ este divergentă

Demonstrație. Utilizăm afirmația: **termenul general al unei serii convergente tinde la zero**. Termenul general al seriei date este $\cos\frac{1}{n}\to 1,\ n\to\infty$ aşadar seria **nu** poate fi convergentă.

**2.** Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+2^n}$ este convergentă

Demonstrație. Utilizăm **criteriul I de comparație**. $\frac{1}{n+2^n}\leq\frac{1}{2^n}$ iar seria $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este convergentă

**3.** Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$, $a>0$, este convergentă

Demonstrație. Utilizăm **criteriul II de comparație**. $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}$. Ştim că seria $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este convergentă, iar dacă notăm cu $v_n$ termenul general $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}$. Inegalitatea $\frac{a}{n+1}<\frac{1}{2}$ este adevărată pentru $n>2a-1$

**4.** Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1+\sqrt{n}}{3n+2}$ este divergentă

Demonstrație. Utilizăm **criteriul III de comparație**. $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{n}}{3n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+n}{3n+2}=\frac{1}{3}$ iar seria armonică generalizată pentru $\alpha=\frac{1}{2}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ este divergentă

**5.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$ este convergentă

Demonstrație. Utilizăm **criteriul raportului**. $\frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}}=\frac{2n+1}{3n+2}\to\frac{2}{3}<1$

**6.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ este convergentă

Demonstrație. Utilizăm **criteriul radical**. $\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{2}<1$

**7.** Analizați convergența seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$, $\alpha>0$

Soluție. Pornim de la **criteriul Raabe-Duhamel**, pentru termenul general $u_n=\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$, şi avem:

$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}}{\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}}-1\right)=n\left(\frac{\alpha+n}{n+1}-1\right)=\frac{(\alpha-1)n}{n+1}\to\alpha-1$, deci seria este convergentă pentru $\alpha>2$ şi divergentă pentru $\alpha\in(0,2)$. Pentru $\alpha=2$ seria este $\sum\frac{1}{n+1}$ care este divergentă

## Serii cu termeni oarecare

**Criteriul general (Cauchy)** $\sum u_n$ convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$

**Criteriul Abel-Dirichlet** Fie $\sum a_n v_n$ ; dacă: $\begin{cases} t_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \text{ este mărginit} \\ a_n \downarrow 0 \, (\text{descrescător şi convergent la } 0) \end{cases}$ atunci $\sum a_n v_n$ convergentă

**Seriile alternate** sunt seriile de forma $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n a_n$

**Criteriul lui Leibnitz** Dacă $a_n \downarrow 0$ (monoton descrescător şi convergent la 0) atunci $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

**Serii absolut convergente** sunt seriile pentru care $\sum\limits_{n \geq 0} | u_n | < \infty$ . Orice serie **absolut convergentă** este **convergentă**

Seriile convergente care nu sunt absolut convergente se numesc ***serii semiconvergente***

Seriile **necondiționat convergente** sunt seriile care au aceeaşi limită indiferent de ordinea termenilor.

**Teoremă**. Orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă

## Operații cu serii convergente

**Suma** dacă $\sum u_n = U$ şi $\sum v_n = V$ atunci $\sum \left( a u_n + b v_n \right) = aU + bV$

**Produsul** *"pe linii şi coloane"* (de tip 1)

$$\begin{matrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & u_1 v_4 & \ldots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & u_2 v_4 & \ldots \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & u_3 v_4 & \ldots \\ u_4 v_1 & u_4 v_2 & u_4 v_3 & u_4 v_4 & \ldots \end{matrix} \Rightarrow u_1 v_1 + \left( u_2 v_1 + u_2 v_2 + u_1 v_2 \right) + \left( u_3 v_1 + u_3 v_2 + u_3 v_3 + u_2 v_3 + u_1 v_3 \right) \ldots$$

.........................

**Produsul** *"diagonal"* (de tip 2)

$$\begin{matrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & u_1 v_4 & \ldots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & u_2 v_4 & \ldots \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & u_3 v_4 & \ldots \\ u_4 v_1 & u_4 v_2 & u_4 v_3 & u_4 v_4 & \ldots \end{matrix} \Rightarrow u_1 v_1 + \left( u_2 v_1 + u_1 v_2 \right) + \left( u_3 v_1 + u_2 v_2 + u_1 v_3 \right) \ldots$$

.........................

dacă $\sum u_n = U$ şi $\sum v_n = V$ sunt absolut convergente, atunci $\sum u_{i_n} v_{j_m} = UV$ este absolut convergentă (deci necondiționat convergentă, adică produsele de tip 1 şi de tip 2 au aceeaşi limită)

## Şiruri de numere complexe: $\left( z_n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \ z_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$

<u>mărginire</u>: $\exists M \geq 0$ a.î. $| z_n | \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ (unde modulul numărului $z=a+ib$ este definit prin $| z | = \sqrt{a^2 + b^2}$ )

<u>convergență</u>: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $| z_n - z | < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$

<u>Cauchy</u> $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $| z_n - z_m | < \varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon$ sau $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $| z_{n+p} - z_n | < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$

**Propoziție** $z_n = a_n + \mathrm{i} b_n \to a + \mathrm{i} b$ dacă şi numai dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$

**Consecință**: Un şir de numere complexe este convergent dacă şi numai dacă este Cauchy

## Serii de numere complexe

$\sum z_n$ este absolut convergentă dacă seria cu termeni pozitivi $\sum | z_n |$ este convergentă

**Aplicație**: *funcția exponențială* $\mathbb{C} \ni z \to e^z \in \mathbb{C}, e^z = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{z^n}{n!}$ , are proprietatea că $e^u e^v = e^{u+v}$

**1.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{2^n}$ este convergentă. **Solutie**. Utilizăm criteriul lui **Cauchy**: $\left|s_{n+p}-s_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+...+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leq$

$\frac{1}{2^{n+1}}+...+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\leq\frac{1}{2^n}\to 0, n\to\infty$, independent de *p*.

**2.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n}{n^3}$ este convergentă. **Solutie**. Utilizăm criteriul **Abel-Dirichlet**, $a_n=\frac{1}{n}$, $v_n=\frac{\cos n}{n^2}$; $t_n=\cos 1+\frac{\cos 2}{2^2}+\ldots+\frac{\cos n}{n^2}$ este mărginit deoarece $\left|t_n\right|\leq 1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}<\infty$ iar seria armonică generalizată este convergentă pentru $\alpha=2$; in plus, $a_n$ este monoton descrescător şi convergent la 0.

**3.** Calculați $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$ **Soluție**. Utilizăm criteriul lui **Leibnitz**, deoarece $a_n=\frac{1}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, deci seria ese convergentă. Pentru calcul folosim şirul $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ care este convergent; notăm limita sa cu *x* si calculăm:

$$s_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=x_{2n}+\ln 2n-x_n-\ln n\to\ln 2$$

**4.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n+2^n}$ este convergentă. **Solutie**. Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este convergentă**. Considerăm seria $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{\sin n}{n+2^n}\right|$; deoarece $\left|\frac{\sin n}{n+2^n}\right|\leq\frac{1}{2^n}$, utilizăm **criteriul I de comparaţie** cu seria geometrică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$

**5.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}$ este necondiționat convergentă (este convergentă indiferent de ordinea termenilor)

**Solutie**. Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă**. Considerăm $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}\right|$ şi aplicăm **primul criteriu de comparaţie** folosind $\left|\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}\right|\leq\frac{n+n^2}{n^n}$. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n+n^2}{n^n}$ este convergentă în virtutea criteriului radical: $\sqrt[n]{\frac{n+n^2}{n^n}}=\frac{\sqrt[n]{n+n^2}}{n}\to 0$, $n\to\infty$

**6.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!+(-1)^n 2^n}{n^n}$ este absolut convergentă. **Solutie**. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ este convergentă în baza criteriului raportului iar seria $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n^n}$ este convergentă în baza criteriului radical, în consecință seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!+2^n}{n^n}$ este convergentă. Deoarece $\left|\frac{n!+(-1)^n 2^n}{n^n}\right|\leq\frac{n!+2^n}{n^n}$, utilizând **primul criteriu de comparaţie**, rezultă că seria este absolut convergentă.

**7.** Seria $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\ldots$, $z\in\mathbb{C}$ este absolut convergentă. **Solutie**. Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este convergentă**. Pentru seria modulelor utilizăm criteriul raportului $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|z|^n}=\frac{|z|}{n+1}\to 0$, $n\to\infty$. **Prin definiție**,

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\ldots,\ z\in\mathbb{C}$$

# Şiruri de funcții

**Definiții**. Fie $f_n, f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Şirul $f_n$ **converge simplu** (punctual) la $f$, dacă

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{x,\varepsilon}, \forall n \geq n_{x,\varepsilon} : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \text{ (rangul } n_{x,\varepsilon} \text{ depinde şi de } x \text{ şi de } \varepsilon)$$

- Şirul $f_n$ **converge uniform** la $f$, dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \text{ (rangul } n_\varepsilon \text{ depinde numai de } \varepsilon)$$

- Şirul $f_n$ este **Cauchy uniform**, dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in E : \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon \text{ (rangul } n_\varepsilon \text{ depinde numai de } \varepsilon)$$

**Proprietăți imediate**

- Un şir este convergent uniform dacă şi numai dacă este Cauchy uniform.
- Dacă şirul de funcții $f_n$ converge uniform atunci converge simplu.
- Convergența simplă nu atrage convergența uniformă

**Proprietăți care se transmit limitei prin convergență uniformă**

Fie $f_n, f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow{u} f$

- Dacă funcțiile $f_n$ sunt **mărginite**, atunci $f$ este mărginită.
- Dacă funcțiile $f_n$ sunt **continue**, atunci $f$ este continuă.
- Dacă funcțiile $f_n$ sunt **derivabile** şi şirul derivatelor este uniform convergent, $f_n' \xrightarrow{u} g$, atunci $f$ este derivabilă şi $f' = g$.
  - ◊ Concluzia se exprimă condensat în forma: $\left(\lim f_n(x)\right)' = \lim f_n'(x)$
- Dacă $E$ este interval mărginit, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $f$ sunt derivabile, $f_n' \xrightarrow{u} f'$ iar $f_n$ converge într-un punct $a \in E$ la $f(a)$, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $E$.
- Dacă $f_n$ sunt continue, atunci $\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

**1.** Calculați limita (simplă) a şirului de funcții $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=\dfrac{nx+1}{nx^2+3}$

Soluție. Avem $\lim f_n(0)=\dfrac{1}{3}$ iar pentru $x\neq 0$, avem $\lim f_n(x)=\dfrac{1}{x}$, în concluzie, dacă notăm $f:[0,1],\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, x=0\\ \dfrac{1}{x}, x\neq 0\end{cases}$, atunci $\lim f_n=f$.

**2.** Arătați că şirul de funcții $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\dfrac{x+n}{x+n+1}$ este convergent uniform

Soluție. Limita simplă (punctuală) este $\lim f_n(x)=1$; în concluzie, dacă notăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1$, atunci $f_n\xrightarrow{s} f$. Arătăm că limita este uniformă, $\left|f_n(x)-f(x)\right|=\dfrac{1}{n+x+1}<\dfrac{1}{n}$, deoarece $\dfrac{1}{n}\to 0, n\to\infty$, independent de *x*.

**3.** Arătați că şirul de funcții $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$ nu este uniform convergent.

Soluție. Pentru $x<0, \lim f_n(x)=-\dfrac{\pi}{2}$, pentru $x>0, \lim f_n(x)=\dfrac{\pi}{2}$ şi $\lim f_n(0)=0$. În concluzie, dacă notăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, x<0\\ 0, x=0\\ \dfrac{\pi}{2}, x>0\end{cases}$ 1, atunci $f_n\xrightarrow{s} f$. Utilizăm afirmația: **limita uniformă a unui şir de funcții continue este o funcție continuă**. Observăm că funcția *f* nu este continuă deci convergența nu poate fi uniformă.

**4.** Arătați că şirul de funcții $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\dfrac{n}{x+n}$ nu este uniform convergent.

Soluție. Şirul este convergent punctual (simplu) la funcția constantă $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1$. Convergența depinde însă de *x*, $\left|\dfrac{n}{x+n}-1\right|=\dfrac{x}{x+n}$ iar $\dfrac{x}{x+n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)x$. Se observă cu uşurință că pentru $\varepsilon$ şi $n_\varepsilon$ date, există $\overline{x}>0$ astfel încât inegalitatea nu mai este adevărată, respectiv pentru care $n_\varepsilon\le\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)\overline{x}$. În consecință, convergența nu este independentă de *x* deci nu este uniformă.

**5.** Calculați $\lim\displaystyle\int_0^1\frac{1}{n+x^5}dx$

Soluție. Şirul de funcții $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=\dfrac{1}{n+x^5}$ este convergent punctual (simplu) la funcția constantă $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=0$. Convergența este uniformă deoarece $\left|f_n(x)-f(x)\right|=\dfrac{1}{n+x^5}\le\dfrac{1}{n}\to 0, n\to\infty$, independent de *x*. Pentru limită folosim proprietatea: $\lim\displaystyle\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim f_n(x)dx$, deci $\lim\displaystyle\int_0^1\frac{1}{n+x^5}dx=0$

**6.** Calculați $\lim\displaystyle\int_2^5 e^{-nx^2}dx$

Soluție. Şirul de funcții $f_n:[2,5]\to\mathbb{R}, f_n(x)=e^{-nx^2}$ este convergent punctual (simplu) la funcția constantă $f:[2,5]\to\mathbb{R}, f(x)=0$. Convergența este uniformă deoarece $\left|f_n(x)-f(x)\right|=e^{-nx^2}\le e^{-4n}\to 0, n\to\infty$, independent de *x*. Pentru calculul limitei folosim aceeaşi proprietate ca la exercițiul anterior, deci $\lim\limits_n\displaystyle\int_2^5 e^{-nx^2}dx=\int_2^5\lim\limits_n e^{-nx^2}dx=0$. De remarcat faptul că integrala nu poate fi calculată direct deoarece funcția nu are primitive exprimabile prin funcții elementare.

## Serii de funcții

Fie $u_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $\sum u_n$ se numeşte serie de funcții.

### Criterii de convergență pentru serii de funcții

**Criteriul general al lui Cauchy**

- Dacă $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}$ converge uniform la 0, pentru $n \to \infty$, independent de *p*, atunci seria $\sum u_n$ este uniform convergentă.
- Dacă $|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}|$ converge uniform la 0, pentru $n \to \infty$, independent de *p*, atunci seria $\sum u_n$ este uniform absolut convergentă.

**Criteriul lui Weierstass** (criteriu de majorare). Dacă $\exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $|u_n(x)| \le a_n, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\sum a_n < \infty$, atunci $\sum u_n$ este uniform absolut convergentă pe *E*.

**Criteriul lui Dirichlet**. Fie $a_n, v_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă $s_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ sunt funcții uniform mărginite pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (constanta de mărginire nu depinde de *n*) şi $a_n \downarrow 0$ (descrescător şi convergent la 0) uniform, atunci seria $\sum a_n v_n$ este uniform convergentă pe *E*

**Criteriul lui Leibnitz**. Fie $a_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă $a_n \downarrow 0$ uniform, atunci seria seria $\sum (-1)^n a_n$ este uniform convergentă pe *E*

**Definiție**. Mulțimea $A = \left\{ x \middle| \sum u_n(x) \text{ este convergentă} \right\}$ se numeşte mulțime de convergență a seriei $\sum u_n$.

### Proprietăți care se transmit sumei seriei, prin convergență uniformă

Fie $u_n, u: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sum u_n \xrightarrow{u} u$

- Dacă funcțiile $u_n$ sunt **continue** atunci *u* este continuă.
- Dacă funcțiile $u_n$ sunt **derivabile** şi $\sum u_n' \xrightarrow{u} v$, atunci *u* este derivabilă şi $u' = v$.
  - ◊ Concluzia se exprimă condensat în forma: $\left(\sum u_n(x)\right)' = \sum u_n'(x), \forall x \in E$
  - ◊ Proprietatea se numeşte "proprietatea de derivare termen cu termen a seriilor de funcții"
- Dacă *E* este interval mărginit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi *u* sunt derivabile, $\sum u_n' \xrightarrow{u} u'$ iar $\sum u_n$ converge într-un punct $a \in E$ la $u(a)$, atunci $\sum u_n \xrightarrow{u} u$ pe *E*. Seria de funcții poate fi derivată termen cu termen.
- Dacă funcțiile $u_n$ sunt continue atunci $\sum \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \sum u_n(x)dx$
  - ◊ Proprietatea se numeşte "proprietatea de integrare termen cu termen a seriilor de funcții"

Seria de funcții $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$ este uniform convergentă pe $[-1,1]$

Demonstrație. Utilizăm **criteriul general al lui Cauchy:** $\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+2)!}+...+(-1)^{n+p}\frac{x^{n+p}}{(n+p+1)!}\right| \leq$

$\frac{1}{(n+2)!}+...+\frac{1}{(n+p+1)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}+...+\frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^n} \to 0, n\to\infty$ , independent de $x\in[-1,1]$ și independent de *p*. Seria este uniform absolut convergentă.

**2.** Seria de funcții $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n^2}$ este uniform absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui **Weierstrass** $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \forall x\in\mathbb{R}$ iar $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ este convergentă

**3.** Seria de funcții $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ este uniform absolut convergentă pe orice interval de forma $[-r,r], r<1$

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui **Dirichlet** $|s_n| = |1+x+\ldots+x^n| \leq 1+r+\ldots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} < \frac{1}{1-r}$ deci este mărginit, iar șirul $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este monoton descrescător și convergent la 0.

**4.** Seria de funcții $\sum_{n\geq 0}(-1)^n nx^n$ este uniform convergentă pe orice interval de forma $[-r,r], r<1$

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui **Leibnitz** $a_n(x) = nx^n$ este descrescător pentru *x* fixat, începând de la un rang, $(n+1)x^{n+1} \leq nx^n \Leftrightarrow x \leq \frac{n}{n+1}$, și anume de îndată ce $r \leq \frac{n}{n+1}$

**5.** Calculați: $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots,\ x\in(-1,1)$

Soluție. Arătăm că seria de funcții $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ **poate fi derivată termen cu termen** pe orice interval de forma $[-r,r], r<1$. Pentru aceasta arătăm că atât aceasta, cât și seria formată cu derivatele funcțiilor (adică seria dată în enunț) sunt uniform convergente. Seria $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ este uniform convergentă în baza criteriului lui Weierstrass deoarece $|x^n| \leq r^n$ iar seria geometrică $\sum_{n\geq 0} r^n$ este convergentă pentru $r<1$. Seria formată cu derivatele funcțiilor, $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$ este de asemenea uniform convergentă în baza criteriului lui Weierstrass deoarece $|(n+1)x^n| \leq (n+1)r^n$ iar seria $1+2r+3r^2+\ldots+(n+1)r^n+\ldots$ este convergentă în baza criteriului raportului: $\lim\frac{(n+2)r^{n+1}}{(n+1)n^n} = r < 1$. Pentru calculul efectiv observăm că suma parțială $s_n(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ este uniform convergentă la funcția $\frac{1}{1-x}$ deci suma seriei din enunț se va obține prin derivare: $\frac{1}{(1-x)^2}$

**6.** Calculați: $z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^n}{n}+\ldots,\ z\in[0,1)$

Soluție. Am văzut deja că seria de funcții $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ este uniform convergentă pe $[0,r], r<1$, în consecință **poate fi integrată termen cu termen** pe orice interval $[0,z], z<1$, așadar suma seriei este

$$\int_0^z \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x)\Big|_0^z = -\ln(1-z)$$

## Serii de puteri, mulțime de convergență

**Definiție**. Seriile de puteri sunt acele serii pentru care $u_n(x) = a_n x^n$ .

### Proprietăți ale mulțimii de convergență, $A$

- $A \neq \varnothing$ deoarece $0 \in A$
- **Teorema I a lui Abel**. Există $\rho$, $0 \leq \rho \leq \infty$, astfel încât:

  1. $|x| < \rho \Rightarrow \sum a_n x^n$ este absolut convergentă
  2. $|x| > \rho \Rightarrow \sum a_n x^n$ este divergentă
  3. $\forall r, 0 < r < \rho$, $\sum a_n x^n$ este uniform absolut convergentă pe $[-r, r]$.

- Mulțimea de convergență $A$ este un interval centrat (un disc în cazul $\mathbb{C}$) care poate fi de forma $(-\rho, \rho)$, $[-\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho]$ sau $[-\rho, \rho]$. Numărul $\rho$ se numeşte **rază de convergență**.

### Determinarea razei de convergență

**Teorema Cauchy-Hadamard**. Fie seria de puteri $\sum a_n x^n$ şi $\omega = \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci:

1. $0 < \omega < \infty \Rightarrow \rho = \dfrac{1}{\omega}$
2. $\omega = 0 \Rightarrow \rho = \infty$
3. $\omega = \infty \Rightarrow \rho = 0$

**Corolar**

- Dacă există $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ atunci $\omega = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$
- Dacă există $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ atunci $\omega = \lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

### Proprietăți ale seriilor de puteri

- Funcția sumă, dată de $s(x) = \sum a_n x^n$ , este **continuă** şi **derivabilă** pe orice mulțime $[-r, r]$, $r < \rho$.
- O serie de puteri se poate **deriva (integra)** termen cu termen pe $(-\rho, \rho)$ .
- **Teorema a II-a a lui Abel**. Dacă $\rho \in A$ atunci $\lim\limits_{s \uparrow \rho} s(x) = s(\rho)$ iar dacă $-\rho \in A$ atunci $\lim\limits_{s \downarrow -\rho} s(x) = s(-\rho)$ .

**1.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^3}$

Soluție. Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard**

$\omega=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}}=\lim\frac{n^3}{(n+1)^3}=1$ şi $\rho=\frac{1}{\omega}=1$, deci seria este absolut convergentă pentru $x\in(-1,1)$ şi uniform absolut convergentă pe orice interval $[-r,r]\subset(-1,1)$. Pentru $x=1$ seria devine $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ care este convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha=3$). Pentru $x=-1$ seria devine $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3}$ care este absolut convergentă (seria modulelor este exact cea anterioară). Mulțimea de convergență este $A=[-1,1]$.

**2.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Soluție. Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard**

$\omega=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$ şi $\rho=\frac{1}{\omega}=1$; seria este absolut convergentă pe $(-1,1)$ şi uniform absolut convergentă pe orice interval $[-r,r]\subset(-1,1)$. Pentru $x=1$ seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha=\frac{1}{2}$). Pentru $x=-1$ seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ este absolut convergentă în baza criteriului lui Leibniz ($\frac{1}{\sqrt{n}}$ este monoton descrescător şi convergent la 0). Mulțimea de convergență este $A=[-1,1)$.

**3.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}$

Soluție. Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard**

$\omega=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\frac{1}{n+1}=0$ şi $\rho=\infty$, deci seria este absolut convergentă pentru $x\in\mathbb{R}$ şi uniform absolut convergentă pe orice interval de forma $[-r,r]$. Mulțimea de convergență este $A=\mathbb{R}$.

**4.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}n^n x^n$

Soluție. Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard**

$\omega=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\infty$ şi $\rho=0$, deci mulțimea de convergență este $A=\{0\}$.

**5.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}2^n x^n$

Soluție. Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard**

$\omega=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$ şi $\rho=\frac{1}{2}$. deci seria este absolut convergentă pentru $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi uniform absolut convergentă pe orice interval de forma $[-r,r]\subset\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Pentru $x=\frac{1}{2}$ seria devine $\sum_{n\geq 1}1$ care este divergentă.

Pentru $x=-1$ seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ este divergentă Mulțimea de convergență este $A=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

## Formula lui Taylor

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$, $a \in I$ şi $p \in \mathbb{N}^*$

**Formula lui Taylor cu restul Schlömlich-Roche**. Pentru orice $x \in I$ există $\xi \in (a,x)$ sau $\xi \in (x,a)$ a.î:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}$$

**Formula lui Taylor cu restul Lagrange**. Pentru orice $x \in I$ există $\xi \in (a,x)$ sau $\xi \in (x,a)$ astfel încât:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

**Formula lui Taylor cu restul Cauchy**. Pentru orice $x \in I$ există $\xi \in (a,x)$ sau $\xi \in (x,a)$ astfel încât:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n$$

**Consecință. Extrem local.**

Dacă $f'(a) = 0, f''(a) = 0, \ldots f^{(n-1)}(a) = 0, f^{n}(a) \neq 0, n \geq 2$, atunci:

dacă *n* este număr par, atunci *a* este punct de extrem local al funcției *f*, astfel:

- minim dacă $f^{(n)}(a) > 0$
- maxim dacă $f^{(n)}(a) < 0$

dacă *n* este număr impar iar *a* este punct interior al lui *I*, atunci *a* nu este punct de extrem

## Formula Mac Laurin

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$, $0 \in I$.

**Formula lui Mac Laurin cu restul Lagrange**. Pentru orice $x \in I$ există $\theta \in (0,1)$ astfel încât:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

**Formula lui Mac Laurin cu restul Cauchy**. Pentru orice $x \in I$ există $\theta \in (0,1)$ astfel încât:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^n$$

## Seria Taylor

**Definiție**. Fie $f \in C^{\infty}(I)$ şi $a \in I$, atunci seria:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

se numeşte **seria Taylor** ataşată funcției *f* în punctul *a*.

$\Rightarrow T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se numeşte polinom Taylor ataşat funcției *f* în punctul *a* iar $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ se numeşte rest de ordin *n*

**Notăm** cu *A* mulțimea valorilor *x* pentru care seria Taylor ataşată funcției *f* este convergentă; această mulțime poate să nu coincidă cu domeniul de definiție al funcției *f*.

**Definiție**. Fie $s(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots, x \in A$; spunem că *f* se dezvoltă în serie Taylor pe mulțimea $B \subset A \cap I$ dacă $f(x) = s(x), \forall x \in B$.

**Teoremă**. *f* se dezvoltă în serie Taylor pe mulțimea *B* dacă şi numai dacă $R_n(x) \to 0, \forall x \in B$

**Teoremă** (criteriu). Dacă $\exists M > 0$ a.î. $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in B$ atunci *f* se dezvoltă în serie Taylor pe *B*.

**Aplicație. Seria binomială** (binomul lui Newton generalizat). Fie $x \in (-1,1), \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, atunci:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

**1.** Dezvoltați în serie, după puterile lui *x*, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x$

Soluție. Utilizăm dezvoltarea în **serie Taylor**. Derivatele sunt $f^{(n)}(x)=e^x$ şi sunt mărginite pe orice mulțime $[-r,r]$ deoarece $e^x\le e^r, \forall x\in[-r,r]$ deci funcția se dezvoltă în serie Taylor pe orice mulțime de forma $[-r,r]$, adică pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Avem $f^{(n)}(0)=1$ deci seria Taylor asociată pentru $a=0$ este $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

**2.** Dezvoltați în serie, după puterile lui *x*, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$

Soluție. Utilizăm dezvoltarea în **serie Taylor**. Derivatele funcției sunt $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$ şi $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$ şi sunt mărginite pe $\mathbb{R}$ deci funcția se dezvoltă în serie Taylor pe $x\in\mathbb{R}$. Avem $f^{(2k)}(0)=0$ şi $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$ deci seria Taylor asociată pentru $a=0$ este $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\ldots$

**3.** Dezvoltați în serie, după puterile lui *x*, funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x}$

Soluție. Utilizăm **seria binomială** pentru $\alpha=-1$: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3\ldots$, $x\in(-1,1)$

**4.** Dezvoltați în serie, după puterile lui $x$, funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x)$

Soluție. Derivata funcției este $f':(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+x}$ care am văzut că se dezvoltă în serie Taylor după puterile lui $x\in(-1,1)$: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3\ldots$, pe care o integrăm termen cu termen şi rezultă $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots$, $x\in(-1,1)$. Pe de altă parte, ştim că $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots=\ln 2$ deci $x\in(-1,1]$

**5.** Dezvoltați în serie, după puterile lui $x$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\mathrm{arctg}x$

Soluție. Derivata funcției este $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ care se dezvoltă în serie Taylor după puterile lui $x^2$: $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6\ldots$, pe care o integrăm termen cu termen şi rezultă $\mathrm{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\ldots$, $x\in(-1,1)$. Pe de altă parte, $-1\in A$, deci $x\in[-1,1)$ şi conform teoremei a II-a lui Abel: $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ldots$

**6.** Dezvoltați în serie, după puterile lui $x$, funcția $f:\mathbb{R}-\{2,3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$

Soluție. Descompunem $\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$ şi dezvoltăm fiecare termen folosind seria binomială, astfel $\frac{1}{x-3}=(x-3)^{-1}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{-1}{1!}\left(-\frac{x}{3}\right)+\frac{(-1)(-2)}{2!}\left(-\frac{x}{3}\right)^2+\ldots\right)=-\frac{1}{3}\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{3^n}, x\in(-3,3)$; dezvoltarea se poate obține şi pornind de la seria geometrică: $\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n\ge0}\left(\frac{x}{3}\right)^n$, $x\in(-3,3)$. Analog, cel de-al doilea termen este: $\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{2^n}, x\in(-2,2)$, deci $\frac{1}{x^2-5x+6}=\sum_{n\ge0}\left(2^{-n-1}-3^{-n-1}\right)x^n$, $x\in(-2,2)\cap(-3,3)=(-2,2)$.

**7.** Dezvoltați în serie, după puterile lui $x-1$, funcția $f:\left(-\frac{3}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{2x+3}$

Soluție. Punem în evidență factorul $x-1$ astfel încât să putem utiliza dezvoltarea în serie binomială:

$$\sqrt{2x+3}=\sqrt{2(x-1)+5}=\sqrt{5}\left(1+\frac{2}{5}(x-1)\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\cdot\frac{2}{5}(x-1)+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{2}{5}(x-1)\right)^n+\ldots\right)=$$

$$\sqrt{5}\left(1+\sum(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!5^n}(x-1)^n\right),\ x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$$

## Spatiul $\mathbb{R}^m$

**Structura algebrică** este dată de operațiile: $\begin{cases} (x_1,x_2,...,x_m)+(y_1,y_2,...,y_m)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_m+y_m) \\ \alpha(x_1,x_2,...,x_m)=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_m) \end{cases}$

**Structura topologică** ( de convergență )

**Notiunea de convergență a şirurilor de vectori trebuie să respecte următorul principiu:**

un sir de vectori, din $\mathbb{R}^m$ este convergent daca si numai daca sirurile formate din componentele termenilor, sunt siruri convergente.

$$x_n \to x \Leftrightarrow (x_n)_i \to (x)_i, i=1..m \text{, unde } x_n=\left((x_n)_1,(x_n)_m,...,(x_n)_m\right), x_n\in\mathbb{R}^m, (x_n)_i\in\mathbb{R}, i=1..m$$

**Exemple, prin care acest principiu este satisfacut**

1.definim $\|z\|_2=\sqrt{z_1^2+z_2^2+...+z_m^2}$ si spunem ca $x_n\to x\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon,\forall n\ge n_\varepsilon,\|x_n-x\|_2<\varepsilon$

2.definim $\|z\|_\infty=\max|z_i|$ si spunem ca $x_n\to x\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon,\forall n\ge n_\varepsilon,\|x_n-x\|_\infty<\varepsilon$

3.definim $\|z\|_1=|z_1|+|z_2|+...+|z_m|$ si spunem ca $x_n\to x\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon,\forall n\ge n_\varepsilon,\|x_n-x\|_1<\varepsilon$

**Definitie.** Fie $V$ spatiu vectorial. Spunem ca aplicatia $\|\ \|:V\to\mathbb{R}_+$ este o ***norma***, daca verifica proprietatile:

1.$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|,\forall x\in V,\forall\alpha\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$

2.$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|,\forall x,y\in V$

3.$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

**Observatie**. Expresiile $\|\ \|_2,\|\ \|_\infty,\|\ \|_1$ definesc, fiecare, o norma in sensul definitiei anterioare.

De cele mai multe ori, se foloseste norma $\|\ \|_2$, numita si <u>norma euclidiana</u>.

**Sir Cauchy.**

**Definitie**. Sirul $(x_m)$ este Cauchy daca $\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon,\forall n,m\ge n_\varepsilon,\|x_n-x_m\|<\varepsilon$

**Proprietate**. Un sir de vectori din $\mathbb{R}^m$ este Cauchy daca si numai daca este convergent.

### Functii continue

**Definitie**. Fie $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ si $x\in\mathbb{R}^m$. Spunem ca $l\in\mathbb{R}^p$ este limita functiei *f* in *x* daca $\forall x_n\to x\Rightarrow f(x_n)\to l$

**Definitie**. Fie $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ si $x\in\mathbb{R}^m$. Spunem ca functia *f* este continua in *x* daca $\forall x_n\to x\Rightarrow f(x_n)\to f(x)$

**Exemplu**. Orice aplicatie liniara $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ este continua.

### Topologia (normei) pe $\mathbb{R}^m$

**Definitie**. Numim ***bila*** de centru *a* si raza *r*, multimea $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^m,\|x-a\|<r\}$

**Definitie**. Spunem ca $x\in A$ este punct interior multimii $A\subset\mathbb{R}^m$ daca exista $B(x,r)\subset A$. Multimea punctelor interioare se notează prin $\overset{\circ}{A}$. O multime *A* se numeste ***deschisa*** daca $A=\overset{\circ}{A}$ si are proprietatea ca, daca un sir $(x_n)$ converge la un elemente $x\in A$, atunci exista un rang $n_0$ astfel incat $x_n\in A,\forall n\ge n_0$.

**Definitie**. Spunem ca *x* este punct aderent la multimea $A\subset\mathbb{R}^m$ daca $\forall B(x,r),B(x,r)\cap A\ne\varnothing$. Multimea punctelor aderente se noteaza prin $\overline{A}$. O multime *A* se numeste ***inchisa*** daca $A=\overline{A}$ si are proprietatea ca orie sir convergent, format cu elemnte din *A*, are limita continuta tot in *A*.

**Definitie**. O multime $A\subset\mathbb{R}^m$ se numeste ***marginita*** daca $\exists M>0$ astfel incat $\|x\|\le M,\forall x\in A$

**Definitie**. O multime $A\subset\mathbb{R}^m$ se numeste ***compacta*** daca este inchisa si marginita. O multime compacta are proprietatea ca orice sir continut in multime poseda un subsir convergent, catre un element din *A*.

**Proprietăți ale funcțiilor continue**

1.O funcție $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ este continuă daca şi numai dacă toate componentele, $f_i:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, sunt continue

2.O funcție continuă, definită pe o mulțime compactă, $f:K\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ este uniform continuă, în sensul următor:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0,\forall x',x'',\|x'-x''\|<\delta_\varepsilon\Rightarrow\|f(x')-f(x'')\|<\varepsilon$$

3.O funcție continuă, definită pe o mulțime compactă, $f:K\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ este marginită şi işi atinge marginile

**Spatiul $\mathbb{R}^m$**

1.Fie sirul $(u_n,v_n)\in\mathbb{R}^2$, convergent in raport cu norma euclidiana, avand limita $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Atunci sirurile de numere reale $u_n$ si $v_n$ sunt convergente, iar $u_n\to u$ si $v_n\to v$.

Demonstratie. Conform definitiei convergentei in raport cu norma euclidiana, avem:

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon \text{ astfel incat } \forall n\ge n_\varepsilon \Rightarrow \left\|(u_n,v_n)-(u,v)\right\|_2<\varepsilon$$

ceea ce, prin explicitarea normei arata ca:

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon \text{ astfel incat } \forall n\ge n_\varepsilon \Rightarrow \sqrt{(u_n-u)^2+(v_n-v)^2}<\varepsilon$$

de unde rezulta imediat ca:

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon \text{ astfel incat } \forall n\ge n_\varepsilon \Rightarrow |u_n-u|<\varepsilon \text{ si}$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon \text{ astfel incat } \forall n\ge n_\varepsilon \Rightarrow |v_n-v|<\varepsilon$$

2.Reciproc, daca sirurile de numere reale $u_n$ si $v_n$ sunt convergente, iar $u_n\to u$ si $v_n\to v$, atunci sirul $(u_n,v_n)\in\mathbb{R}^2$ este convergent in raport cu norma euclidiana si are limita $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

Demonstratie. Este suficient sa observam ca de indata ce avem doua inegalitati de forma $|u_n-u|<\varepsilon$ si $|v_n-v|<\varepsilon$, atunci este adevarata inegalitatea $\sqrt{(u_n-u)^2+(v_n-v)^2}<\varepsilon\sqrt{2}$, adica de indata ce expresiile $|u_n-u|$ si $|v_n-v|$ sunt convergente la 0, rezulta ca expresia $\sqrt{(u_n-u)^2+(v_n-v)^2}$ converge la 0, adica $\left\|(u_n,v_n)-(u,v)\right\|_2\to 0$.

3.Fiind dati vectorii $x,y\in\mathbb{R}^m$, se numeste ***produs scalar***: $\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+...+x_my_m$ si este adevarata inegalitatea ***Cauchy-Schwartz***: $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$

Demonstratie. Utilizam inegalitatea $(at-b)^2\ge 0$, sau $t^2a^2-2abt+b^2\ge 0$, pe care o aplicam succesiv, astfel:

$$t^2x_1^2-2x_1y_1t+y_1^2\ge 0,\ t^2x_2^2-2x_2y_2t+y_2^2\ge 0,\ \dots,\ t^2x_m^2-2x_my_mt+y_m^2\ge 0$$

iar prin insumarea lor rezulta $t^2\|x\|^2-2\langle x,y\rangle t+\|y\|^2\ge 0$, drept urmare, ecuatia de gradul 2 asociata are discriminantul cel mult egal cu zero, adica $\Delta=4\langle x,y\rangle^2-4\|x\|^2\|y\|^2\le 0$

3.Aplicatia liniara $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(2x+3y,x-2y)$ este continua

Demonstratie. Consideram sirul $(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2,(x_n,y_n)\to(x,y)$, adica $x_n\to x$ si $y_n\to y$ si observam ca putem utiliza operatiile cu siruri convergente, pe multimea numerelor reale, astfel incat:

$$2x_n+3y_n\to 2x+3y \text{ si } x_n-2y_n\to x-2y$$

de unde rezulta ca $(2x_n+3y_n,x_n-2y_n)\to(2x+3y,x-2y)$, adica $T$ este continua.

4.Limita unei functii de mai multe variabile nu trebuie confundata cu limita iterata, adica o limita de forma:

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a}f(x,y)\right)$$

De exemplu, consideram functia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+2y^2} & \text{daca } (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & \text{daca } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ precum si cele doua limite iterate $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)=0$ care sunt egale, dar, totusi, functia nu are limita in $(0,0)$ deoarece pentru $x_n=y_n=\dfrac{1}{n}$ vom obtine $\lim f(x_n,y_n)=\lim\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}}=\dfrac{1}{3}$ iar pentru $x_n=\dfrac{3}{n}$ si $y_n=\dfrac{1}{n}$ vom obtine o limita diferita, respectiv $\lim f(x_n,y_n)=\lim\dfrac{\frac{3}{n^2}}{\frac{11}{n^2}}=\dfrac{3}{11}$

## Derivabilitate in $\mathbb{R}^m$

**Definiție**. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in \overset{o}{A}$; spunem ca functia $f$ este ***diferențiabilă în sens Frechet*** în $a$ dacă $\exists T_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, aplicație liniară şi continuă astfel încât:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left\| f(a+h) - f(a) - T_a(h) \right\|}{\|h\|} = 0$$

**Notație**. Diferențiala Frechet a funcției $f$ în punctul $a$ se noteaza prin $df(a)$ sau $f^{'}(a)$.

**Caz particular**: Derivata unei aplicații linare şi continue $T$, coincide cu $T$.

**Teoremă**. Diferențiala Frechet a funcției $f$ în punctul $a$ este unică.

**Teoremă**. Dacă funcția $f$ este diferențiabilă Frechet în $a$ atunci $f$ este continuă în $a$.

### Derivate parțiale

**Definiție**. Se numeşte **derivată parțială** a componentei $f_i$ a funcției $f$, pe direcția (după variabila) $j$, derivata funcției reale $\left(a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon\right) \ni \tau \to f_i\left(a_1, \dots, a_{j-1}, \tau, a_{j+1}, \dots, a_m\right)$ în $a_j$, adică:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i\left(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_m\right) - f_i\left(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m\right)}{t}$$

**Teoremă**. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, a \in \overset{o}{A}$, este diferențiabilă Frechet în $a$, atunci există $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), \forall i, j$ iar matricea asociată aplicației linaire şi continue $f^{'}(a)$ are componentele $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Reciproc, dacă există $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), \forall i, j$ şi sunt continue pe vecinătate a lui $a$, conținută în $A$, atunci $f$ este diferențiabilă în $a$.

Se numeşte **matrice Jacobiană** a funcției $f$ în punctul $a$, matricea asociată diferențialei Frechet, $f^{'}(a)$:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

**Derivata compunerii:**

$$(g \circ f)^{'}(a) = g^{'}\left(f(a)\right) \circ f^{'}(a)$$

$$J_{g \circ f}(a) = J_g\left(f(a)\right) \cdot J_f(a)$$

**Cazuri particulare:**

$\mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\varphi = f \circ u$, atunci $\varphi^{'} = \frac{\partial f}{\partial u_1} u_1^{'} + \frac{\partial f}{\partial u_2} u_2^{'} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} u_m^{'}$

$t \to f\left(\left(x(t), y(t)\right)\right)$

$\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right)' = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) y'(t)$

**Derivabilitate in $\mathbb{R}^m$**

**1.** Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy + x + y^2 + 5$.

Soluție. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y+1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y$, $J_f(x,y) = (y+1, x+2y)$

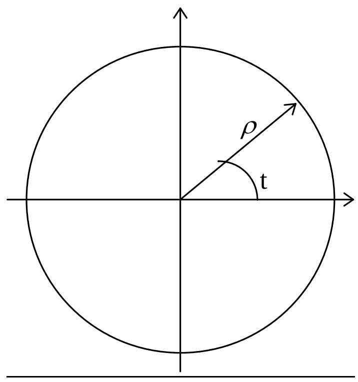
**2.** Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x + x^2, 2x+1)$.

Soluție. $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x) = 1+2x$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x) = 2$, $J_f(x) = \begin{pmatrix} 1+2x \\ 2 \end{pmatrix}$

**3.** Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției $f:\mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (xy, x^2 + y, x\ln y)$.

Soluție. $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = y$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \ln y$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{y}$,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \\ \ln y & \dfrac{x}{y} \end{pmatrix}$$




**4.** Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul parametrizării $\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}$.

Soluție. $\dfrac{\partial x}{\partial \rho} = \cos t$, $\dfrac{\partial x}{\partial t} = -\rho\sin t$, $\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \sin t$, $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \rho\cos t$, $J_F = \begin{pmatrix} \cos t & -\rho\sin t \\ \sin t & \rho\cos t \end{pmatrix}$

**5.** Calculați, folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, derivatele parțiale şi Jacobianul compunerii funcțiilor $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x+y, xy, x^2 + 2xy)$ şi $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y,z) = (xz, y^2 + z)$.

Soluție. Fie $h = g \circ f, h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, h(x,y) = g(f(x,y))$, folosim formula Jacobianului compunerii de funcții: $J_h(x,y) = J_g(f(x,y)) \cdot J_f(x,y)$. Dar, $J_g(f(x,y)) = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy & 0 & x+y \\ 0 & 2xy & 1 \end{pmatrix}$ şi $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix}$, deci

$J_h = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6xy + 4y^2 & 3x^2 + 4xy \\ 2xy^2 + 2x + 2y & 2x^2 y + 2x \end{pmatrix}$. Derivatele parțiale ale funcției compuse pot fi obținute fie din Jacobian, fie prin calcul, de exemplu: $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g_1}{\partial f_1}(f_1, f_2, f_3)\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial g_1}{\partial f_2}(f_1, f_2, f_3)\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial g_1}{\partial f_3}(f_1, f_2, f_3)\dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) =$

$f_3(x,y) \cdot 1 + 0 \cdot y + f_1(x,y) \cdot (2x+2y) = x^2 + 2xy + (x+y)(2x+2y) = 3x^2 + 6xy + 2y^2$

**6.** Se consideră $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2 + y, 2xy)$, calculați derivatele parțiale în funcție de parametrii transformării de coordonate polare în plan.

Soluție: $\dfrac{\partial f_1}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = 2\rho\cos t \cdot \cos t + 1 \cdot \sin t = 2\rho\cos^2 t + \sin t$, şi analog obținem toate derivatele $\dfrac{\partial f_1}{\partial t} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = -2\rho^2 \sin t\cos t + \rho\sin t$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial \rho} = 4\rho\sin t \cdot \cos t$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial t} = 2\rho^2 \cos 2t$

**7.** Calculați derivatele parțiale de ordin 2 ale funcției $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x^2 z + y, xyz)$.

Soluție: Derivatele parțiale de ordin I sunt $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 2xz$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = x^2$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = yz$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = xz$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = xy$ iar cel de ordin II se obțin prin derivarea acestora: $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2z$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} = 0$,

$\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} = 2x$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = z$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} = y$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = z$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} = x$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} = y$,

$\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} = x$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = 0$.

## Diferențiala de ordinul I

Fie $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, diferențiabilă în sens Frechet în *a*. Diferențiala Frechet poate avea următoarele interpretări:

- Matrice Jacobiană (matricea asociată aplicației liniare şi continue) $df(a)$:

$$df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)$$

- Combinație liniară a proiecțiilor:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)p_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)p_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)p_m$$

- Diferențiala unei proiecții coincide cu proiecția; deci, notând cu $dx_i$ diferențiala proiecției $p_i$ avem:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)dx_m$$

- Pentru $h \in \mathbb{R}^m$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, avem: $df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)h_m$

Invarianța diferențialei de ordinul I la compunere, $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = df$$

Invarianța este <u>formală</u> pentru că $dh$ şi $df$ nu au acelaşi domeniu de definiție.

## Derivate parțiale de ordin 2

Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in \overset{o}{A}$ derivabilă pe $V \subseteq A, a \in V$. Dacă funcția $V \ni u \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ posedă derivată parțială după direcția *j* aceasta se numeşte derivată parțială de ordin 2 a lui *f*, notată $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(u)$.

**Teoremă** (Schwartz). Dacă $u \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(u)$ şi $u \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)$ sunt continue în *a*, atunci: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Derivate parțiale de ordin 2 pentru funcții compuse, $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

## Diferențiala de ordin superior

Se numeşte diferențială de ordin II forma pătratică: $d^2 f(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $d^2 f(a)h = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j$

**Aplicație**. Fie $\varphi(t) = f(x + th)$, atunci: $\varphi'(t) = df(x+th)h$, $\varphi''(t) = d^2 f(x+th)h$

Se numeşte diferențială de ordin 3, aplicația: $d^3 f(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $d^3 f(a)h = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a)h_i h_j h_k$

**Extreme locale:** Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f \in C^{(2)}(A)$ si fie $x \in \overset{o}{A}$ astfel încât $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, i = \overline{1,m}$. Atunci, dacă forma pătratică $d^2 f(x)h = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)h_i h_j$ este pozitiv definită, *x* este punct de minim, dacă este negativ definită atunci este punct de maxim

## Diferențiala de ordinul I

**1.** Calculați diferențialele de ordin I şi II pentru $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 y + y^3$.

Soluție: Diferențiala de ordin I este $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = 2xydx + \left(x^2 + 3y^2\right)dy$ iar cea de ordin II este $d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2 = 2ydx^2 + 4xdxdy + 6ydy^2$

**2.** Calculați diferențialele de ordin I şi II pentru $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz + x^2 z + y$.

Soluție: $df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz = (yz + 2xz)dx + (xz+1)dy + \left(xy + x^2\right)dz$ şi

$$d^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)dydz +$$
$$2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)dzdx = 2zdx^2 + 2zdxdy + 2xdydz + 2\left(y + 2x\right)dzdx$$

**3.** Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Soluție: Determinăm soluțiile sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

sistem simetric având soluțiile $(1,2), (2,1), (-1,-2), (-2,-1)$, care sunt **punctele critice** ale funcției.

Pentru a stabili care dintre aceste puncte este punct de extrem calculăm diferențiala de ordin II: $d^2 f(x,y) = 6xdx^2 + 12ydxdx + 6xdy^2$ iar Hessianul $\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} = .\ 6\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.

Pentru $(1,2)$, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = -3 < 0$ adică nu este nici pozitiv definită nici negativ definită deci punctul nu este de extrem; pentru $(2,1)$, matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 3 > 0$ adică este pozitiv definită deci punctul este punct de minim local; pentru $(-1,-2)$, matricea $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1 = -1 < 0, \Delta_2 = -3 < 0$ adică nu este nici pozitiv definită nici negativ definită deci punctul nu este de extrem; pentru $(-2,-1)$, matricea $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = 3 > 0$ adică este negativ definită deci punctul este punct de maxim local;

**4.** Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Soluție: Determinăm punctele critice:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, \text{ deci } x = 1, y = 0.$$

Calculăm diferențiala de ordin II a funcției $d^2 f(x,y) = 2dx^2 + 2dxdx + 2dy^2$; Hessianul $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 3 > 0$ deci punctul $(1,0)$ este punct de minim local.

## Functii implicite

**Teorema de inversiune locală.** Fie $f:A\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m, f\in C^1(A), f(a)=b, f'(a)$ este inversabilă, atunci există $U\in Vec(a)$ şi există $V\in Vec(b)$ a.î. $f:U\to V$ este difeomorfism şi:

$$\forall v\in V, g'(v)=\left[f'(u)\right]^{-1}, \text{ unde } f(u)=v\text{, adică:}$$

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(u)\right)=\left[f'(u)\right]^{-1}, \forall u\in U$$

**Teorema funcţiilor implicite.** Fie $A\subset\mathbb{R}^{p+q}$, $f:A\to\mathbb{R}^q$, $f\in C^1(A)$, $(a,b)\in A, a\in\mathbb{R}^p, b\in\mathbb{R}^q$ a.î.:

1. $f(a,b)=0$
2. $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ este inversabilă,

atunci $\exists U\in V(a), \exists V\in V(b), U\times V\subset A$ şi $\varphi:U\to V$ astfel încât:

1. $\varphi(a)=b$
2. $f\left(x,\varphi(x)\right)=0, \forall x\in U$
3. $\varphi\in C^1(U), \varphi'(x)=-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,\varphi(x)\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,\varphi(x)\right)\right)$

<u>în care am facut convenţia</u>: un vector din $\mathbb{R}^{p+q}, (x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_{p+q})$ este notat $(x,y)$ unde $x$ reprezintă grupul $x_1,x_2,\ldots,x_p$ iar $y$ reprezintă grupul $x_{p+1},x_{p+2},\ldots,x_{p+q}$. Matricea derivatelor parţiale ale funcţiei $f$ în raport cu $x_1,x_2,\ldots,x_p$ este notată cu $\frac{\partial f}{\partial x}$ iar matricea derivatelor parţiale ale funcţiei $f$ în raport cu $x_{p+1},x_{p+2},\ldots,x_{p+q}$ este notată cu $\frac{\partial f}{\partial y}$. Notaţia $\varphi'(x)$ reprezintă Jacobianul funcţiei $\varphi$ în $x$.

Numim **determinant funcţional** al funcţiilor $h_1,h_2,\ldots,h_n$ în raport cu variabilele $x_1,x_2,\ldots,x_m$ determinantul matricii $\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,n\\ j=1,m}}$; acesta va fi notat în forma: $\frac{D(h_1,h_2,\ldots,h_n)}{D(x_1,\ldots x_m)}$

**Exprimare echivalentă a derivatelor parţiale ale funcţiei implicite**

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}=-\frac{\dfrac{D(f_1,f_2,\ldots,f_q)}{D(x_{p+1},\ldots x_j,\ldots,x_{p+q})}}{\dfrac{D(f_1,f_2,\ldots,f_q)}{D(x_{p+1},\ldots,x_{p+q})}}, \text{ în care } x_j \text{ se află pe poziţia } i.$$

**Observaţie practică**:
Fiind dat un sistem de ecuaţii neliniare, diferenţialele funcţiilor implicite pot fi obţinute astfel: construim sistemul liniar obţinut egalând cu zero diferenţiala fiecărei ecuaţii apoi rezolvăm sistemul având drept necunoscute diferenţialele funcţiilor implicite. Derivatele parţiale ale funcţiilor implicte sunt coeficienţii diferenţialelor astfel obţinute.

# Functii implicite

**1.** Se consideră sistemul: $\begin{cases} u+v-x-y=0 \\ xu+yv-1=0 \end{cases}$. Calculați derivatele funcțiilor implicite *u* și *v*, în raport cu *x* și *y*.

Soluție: Există trei modalități de calcul.

**I.** Utilizăm teorema funcțiilor implicte, astfel:

Fie $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $X=(x,y)$, $Y=(u,v)$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial X}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ u & v\end{pmatrix},\ \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ x & y\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{y-x}\begin{pmatrix}y & -1\\ -x & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial X}=-\frac{1}{y-x}\begin{pmatrix}y & -1\\ -x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ u & v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{y+u}{y-x} & \frac{y+v}{y-x}\\ \frac{x+u}{x-y} & \frac{x+v}{x-y}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y+u}{y-x},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y+v}{y-x},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x+u}{x-y},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x+v}{x-y}$$

**II.** Utilizăm determinanții funcționali:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(x,v)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ u & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{-y-u}{y-x}=\frac{y+u}{y-x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,v)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ v & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{-y-v}{y-x}=\frac{y+v}{y-x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,x)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{u+x}{y-x}=\frac{x+u}{x-y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,y)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{v+x}{y-x}=\frac{x+v}{x-y}$$

**III.** Scriem sistemul liniar obținut prin egalarea cu zero a diferențialei fiecărei ecuații din sistem:

$$\begin{cases} du+dv-dx-dy=0 \\ xdu+ydv+udx+vdy=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du+dv=dx+dy \\ xdu+ydv=-udx-vdy \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\frac{y+u}{y-x}dx+\frac{y+v}{y-x}dy \\ dv=\frac{x+u}{x-y}dx+\frac{x+v}{x-y}dy \end{cases}$$

**2.** Fie $\cos(x+y+z)+z=0$. Calculați derivatele parțiale ale funcției implicite *z*, în raport cu *x* și *y*.

Soluție: Notăm cu *f* membrul stâng al ecuației, $f(x,y,z)=\cos(x+y+z)+z$, iar derivatele funcției implicite sunt: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{-\sin(x+y+z)}{-\sin(x+y+z)+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{-\sin(x+y+z)}{-\sin(x+y+z)+1}$

**3.** Fie $\begin{cases} y^2+x+xz=1 \\ yz-x+z=4 \end{cases}$. Calculați $\frac{\partial x}{\partial z}$ și $\frac{\partial y}{\partial z}$.

Soluție: Cel mai simplu este să scriem sistemul liniar obținut prin diferențierea fiecărei ecuații: $\begin{cases} (1+z)dx+2ydy+xdz=0 \\ -dx+zdy+(y+1)dz=0 \end{cases}$ pe care îl rezolvăm în raport cu *dz*: $\begin{cases} (1+z)dx+2ydy=-xdz \\ -dx+zdy=-(y+1)dz \end{cases}$,

$\begin{cases} dx=\frac{-xz+2y^2+2y}{z^2+z+2y}dz \\ dy=\frac{-yz-y-z-x-1}{z^2+z+2y}dz \end{cases}$, deci $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{-xz+2y^2+2y}{z^2+z+2y}$ și $\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{-yz-y-z-x-1}{z^2+z+2y}$

**4.** Fie $y+z^2+2xy+3=0$. Calculați $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Soluție: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1+2x}{2z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1+2x}{2z}\right)=\frac{(1+2x)\cdot 2\frac{\partial z}{\partial y}}{4z^2}=\frac{2(1+2x)\left(-\frac{1+2x}{2z}\right)}{4z^2}=-\frac{(1+2x)^2}{4z^3}$

## Extreme cu legături

**Problemă**. Fie $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ şi $S = \left\{ x \,\middle|\, F_1(x) = 0, \dots, F_p(x) = 0 \right\}, p < m$. Să se determine $\min_{u \in S} f(u)$. O astfel de problemă poartă numele de **extrem al funcţiei** *f*, **condiţionat** de legăturile $F_1(x) = 0, \dots, F_p(x) = 0$. Legăturile sunt reprezentate sub forma unui sistem de ecuaţii.

**Principiul de rezolvare** urmăreşte transformarea problemei date într-o problemă echivalentă dar fără legături, astfel: Fie $F: V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, F(x) = \left(F_1(x), F_2(x), \dots, F_p(x)\right)$, $a \in V \subset \mathbb{R}^m$ a.î. $rang\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right) = p$ şi $F(a) = 0$. Din teorema funcţiilor implicte există $U \in Vec(a_{p+1}, \dots, a_m)$ şi $\varphi_1, \dots, \varphi_p : U \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$F_i(\varphi_1(x_{p+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_p(x_{p+1}, \dots, x_m), x_{p+1}, \dots, x_m) = 0$$

Definim funcţia

$$g: U \to \mathbb{R},\ g(x_{p+1}, \dots, x_m) = f(\varphi_1(x_{p+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_p(x_{p+1}, \dots, x_m), x_{p+1}, \dots, x_m)$$

**Teoremă**. Fie $a \in S$, $rang\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right) = p$, atunci sunt echivalente:

- *a* este minim legat pentru *f*
- *a* este extrem local pentru *g*

Problema conţine însă funcţii date sub formă implicită, de aceea introducem o nouă funcţie: $\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \varphi(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \dots + \lambda_p F_p(x)$. Modul în care scalarii $\lambda_i$ "multiplică" legăturile dă numele de **metoda multiplicatorilor lui Lagrange**.

**Teoremă**. Fie $a \in \mathbb{R}^m$, $rang\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right) = p$, atunci sunt echivalente:

- $a \in S$ şi *a* este extrem local pentru *g*
- există $\lambda = \left(\lambda_1, \dots, \lambda_p\right)$ astfel încât $\left(a, \lambda\right)$ este extrem local pentru $\varphi$

Diferenţiala lui $\varphi$, pe o vecinătate a punctului $\left(a, \lambda\right)$, coincide cu diferenţiala lui *g* pe o vecinătate a punctului $\left(a_{p+1}, \dots, a_m\right)$

$$d\varphi\left(\varphi_1\left(x_{p+1}, \dots, x_m\right), \varphi_2\left(x_{p+1}, \dots, x_m\right), \dots, \varphi_p\left(x_{p+1}, \dots, x_m\right), x_{p+1}, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_p\right) = dg\left(x_{p+1}, \dots, x_m\right)$$

ceea ce conduce la următoarea:

**Observaţie practică.** Determinarea punctului critic al lui $\varphi$ este urmată de calculul diferenţialei de ordin 2 a lui *g*.

**1.** Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = xyz$, având legăturile $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=8 \end{cases}$.

Soluție: Notăm $\varphi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz + \lambda_1(x+y+z-5) + \lambda_2(xy+yz+zx-8)$ și rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y+z) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x+z) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x+y) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1} = x+y+z-5 = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2} = xy+yz+zx-8 = 0 \end{cases}$$

Înmulțim prima ecuație cu $x$, a doua cu $y$ și le scădem: $(x-y)(\lambda_1+\lambda_2 z) = 0$. Pentru $x = y$ sistemul devine:
$\begin{cases} xz+\lambda_1+\lambda_2(x+z)=0 \\ x^2+\lambda_1+2\lambda_2 x=0 \\ 2x+z-5=0 \\ x^2+2xz-8=0 \end{cases}$; din ecuația a 3-a, $z = 5-2x$ și ultima ecuație devine $3x^2-10x+8=0$ având soluțiie 2 și $\dfrac{4}{3}$

Corespunzător, obținem soluțiile complete $x=2, y=2, z=1, \lambda_1=4, \lambda_2=-2$ și $x=\dfrac{4}{3}, y=\dfrac{4}{3}, z=\dfrac{7}{3}, \lambda_1=\dfrac{16}{9}, \lambda_2=-\dfrac{4}{3}$

Pentru prima soluție avem $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $rang\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right) = 2$, deci $p = 2$, $m = 3$ adică o singură variabilă independentă, $x$ sau $y$. Diferențialele funcțiilor implicite se obțin din sistemul de legături:
$\begin{cases} dx+dy+dz=0 \\ 3dx+3dy+4dz=0 \end{cases} \Rightarrow dz=0, dy=-dx$ ; $d^2\varphi = 2[(z+\lambda_2)dxdy+(y+\lambda_2)dxdz+(x+\lambda_2)dydz)] = -2dxdy$ ; diferențiala de ordin 2 a lui $g$ se va obține exprimând $dy$ și $dz$ în funcție de $dx$: $d^2g = 2dx^2$ care este pozitiv definită, deci punctul $(2,2,1)$ este punct de minim. Analog se arată că punctul $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$ este punct de maxim deoarece în acest caz avem

$\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{11}{3} & \dfrac{11}{3} & \dfrac{8}{3} \end{pmatrix}$, $d^2\varphi = 2[(z+\lambda_2)dxdy+(y+\lambda_2)dxdz+(x+\lambda_2)dydz)] = 2dxdy$; $d^2g = -2dx^2$ care este negativ definită. Datorită simetriei sistemului vom avea încă 4 soluții, corespunzătoare cazurilor $y = z$ și $z = x$.

**2.** Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 6-4x-3y$, având legăturile $x^2+y^2=1$.

Soluție: Notăm $\varphi(x,y,\lambda) = 6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1)$ și rezolvăm sistemul: $\begin{cases} -4+2\lambda x=0 \\ -3+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ având soluțiile

$\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{2}\right)$ și $\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5},-\dfrac{5}{2}\right)$. Diferențiala de ordin 2 este $d^2\varphi = 2\lambda\left[dx^2+dy^2\right]$. Avem o singură legătură, de unde obținem: $xdx+ydy=0$. Pentru prima soluție, exprimăm $dy = -\dfrac{4}{3}dx$, deci $d^2g = \dfrac{125}{9}dx^2$, adică primul punct este de minim legat. Pentru cea de-a doua soluție avem $d^2g = -\dfrac{125}{9}dx^2$ adică maxim legat.

**3.** Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy$, având legăturile $x+y=1$.

Soluție: Notăm $\varphi(x,y,\lambda) = xy+\lambda(x+y-1)$ și rezolvăm sistemul: $\begin{cases} y+\lambda=0 \\ x+\lambda=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ având soluția $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Diferențiala de ordin 2 este $d^2\varphi = 2\left[dxdy+dyd\lambda+d\lambda dx\right]$. Avem o singură legătură, de unde obținem: $dx+dy=0$. deci $d^2g = -2dx^2$, adică punct de maxim legat.

# Teorie

### Şiruri, convergență, şir Cauchy (fundamental)

şir **monoton** crescător: $x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ; descrescător: $x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

şir **mărginit** $\exists M \in \mathbb{R}_+$ a.î. $|x_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$ sau $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $c_1 \le x_n \le c_2, \forall n \in \mathbb{N}$

şir **convergent** $x_n$ este convergent şi are limita $x$ dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon$

**subşir** dacă $n_1 < n_2 < \dots$ atunci $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots\}$ se numeşte subşir (al şirului $x_n$)

şir **Cauchy** (fundamental).

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \ge n_\varepsilon$ sau, echivalent,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N}$

**În mulțimea numerelor reale sunt adevărate următoarele afirmații**

orice şir mărginit conține un subşir convergent (lema lui Cesaro)
orice şir Cauchy este marginit (in particular, conține un subşir convergent)
un şir este convergent dacă şi numai dacă este Cauchy

**Convergența şirurilor monotone:** un şir monoton şi mărginit este convergent.

**Lema Stoltz Cesaro:**

dacă $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ şi $(b_n)$ este nemărginit şi monoton, atunci $\lim \frac{a_n}{b_n} = l$ .

### Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de numere reale. Numim serie expresia infinită $x_0 + x_1 + \dots + x_n + \dots$ Şirul $s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ se numeşte şirul sumelor parțiale iar $x_n$ se numeşte termenul general.

**Definiție**. Dacă $s_n$ este convergent, atunci spunem că seria este convergentă iar limita se notează cu $\sum_n x_n$ .

**Convergența seriilor cu termeni pozitivi**: dacă $x_n > 0$ atunci $s_n$ este crescător, deci este convergent dacă şi numai dacă este mărginit. **În consecință, pentru ca o serie cu termeni pozitivi să fie convergentă, este necesar şi suficient ca şirul sumelor parțiale să fie mărginit (superior).**

**Propoziție**. Dacă $s_n$ este convergent atunci $x_n \to 0$

**Consecință**. Dacă $x_n \not\to 0$ atunci seria $\sum_n x_n$ nu este convergentă

**Criteriile de comparație** ale seriilor cu termeni pozitivi

Fie $\sum_n u_n$ , $\sum_n v_n$ două serii cu termeni pozitivi

**Criteriul I**. Dacă $\exists n_0, u_n \le v_n, \forall n \ge n_0$ atunci $\begin{cases} \text{dacă} \sum_n v_n \text{ convergentă, atunci} \sum_n u_n \text{ convergentă} \\ \text{dacă} \sum_n u_n \text{ divergentă, atunci} \sum_n v_n \text{ divergentă} \end{cases}$

**Criteriul II**. Dacă $\exists n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}, \forall n \ge n_0$ atunci $\begin{cases} \text{dacă} \sum_n v_n \text{ convergentă, atunci} \sum_n u_n \text{ convergentă} \\ \text{dacă} \sum_n u_n \text{ divergentă, atunci} \sum_n v_n \text{ divergentă} \end{cases}$

**Criteriul III**. Dacă $\exists \lim \frac{u_n}{v_n} = l, 0 < l < \infty$ atunci seriile au aceeaşi natură (convergente sau divergente).

**Criteriul rădăcinii (Cauchy)** Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q \in \mathrm{R}, 0 < q < 1, \exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $\sqrt[n]{u_n} \le q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă pentru o infinitate de termeni avem $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$ atunci seria diverge

**Consecință** Dacă $\lim \sqrt[n]{u_n} < 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim \sqrt[n]{u_n} > 1$ atunci seria diverge

**Criteriul raportului (D'Alembert)** Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q \in \mathrm{R}, 0 < q < 1, \exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă $\exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1, \forall n \ge n_0$ atunci seria diverge

**Consecință** Dacă $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ atunci seria diverge

**Criteriul lui Raabe-Duhamel** Fie $\sum_n u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1.Dacă $\exists q > 1, \exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \ge q, \forall n \ge n_0$ atunci seria converge

2.Dacă $\exists n_0 \in \mathrm{N}^*$ a.î. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \le 1, \forall n \ge n_0$ atunci seria diverge

**Consecință** Dacă $\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$ atunci seria converge iar dacă $\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$ atunci seria diverge

## Serii cu termeni oarecare

**Criteriul general (Cauchy)**

$$\sum u_n \text{ convergentă} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \text{ a.î. } \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathrm{N}$$

**Criteriul Abel-Dirichlet** Fie $\sum a_n v_n$ ; dacă: $\begin{cases} t_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \text{ este mărginit} \\ a_n \downarrow 0 \, (\text{descrescător şi convergent la } 0) \end{cases}$ atunci $\sum a_n v_n$ convergentă

**Seriile alternate** sunt seriile de forma $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$

**Criteriul lui Leibnitz** Dacă $a_n \downarrow 0$ (monoton descrescător şi convergent la 0) atunci $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

**Seriile absolut convergente** sunt seriile pentru care $\sum_{n\geq 0} |u_n| < \infty$.

**Teoremă**. Orice serie **absolut convergentă** este **convergentă**

Seriile convergente care nu sunt absolut convergente se numesc ***serii semiconvergente***

Seriile **necondiționat convergente** sunt seriile care au aceeaşi limită indiferent de ordinea termenilor.

**Teoremă**. Orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă

## Tema: şir Cauchy, convergenţa şirurilor monotone, lema Stoltz-Cesaro

**1.** Şirul $x_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n}{n\cdot(n+1)}$ este convergent

**Demonstraţie**.

Utilizăm afirmaţia: **un şir este Cauchy dacă şi numai dacă este convergent**.

Reamintim definiţia şirului Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \text{ a.î. } \forall n, m \geq n_\varepsilon, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

sau, echivalent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Ultima afirmaţie exprimă faptul că şirul de forma $x_{n-p} - x_n \to 0, n \to \infty$, independent de $p$

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)\cdot(n+p+1)} =$$

$$\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] + \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right] = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} \to 0, n \to \infty,$$

independent de $p$

**2.** Şirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent

**Demonstraţie**. Utilizăm afirmaţia: **un şir monoton şi mărginit este convergent.**

Pornim de la formula lui Lagrange pentru funcţia $\ln : [n, n+1] \to \mathbb{R}, n > 0$, aşadar $\exists c \in (n, n+1)$ a.î. $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$. Cum $c \in (n, n+1)$ rezultă $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, ceea ce conduce la inegalitatea: $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Prin calcul direct avem: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0$ adică şirul este descrescător (în particular, mărginit superior).

Demonstrăm că este mărginit inferior:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (\ln(n+1) - \ln n) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0$$

**3.** Dacă $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, atunci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = l$

**Demonstraţie**.

Utilizăm **Lema Stoltz Cesaro.**

Notăm $x_n = \ln\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{\ln|u_n|}{n}$ şi aplicăm **Lema**, $\frac{\ln|u_{n+1}| - \ln|u_n|}{n+1-n} = \ln\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ln l$, $\ln\sqrt[n]{|u_n|} \to \ln l$

# Tema: seria geometrică şi seria armonică

**1. Seria geometrică**: $\sum\limits_{n\geq 0} q^n = 1+q+q^2+...+q^n+...$ este convergentă pentru $q\in(-1,1)$ şi divergentă pentru $|q|\geq 1$

**Demonstraţie**. Prin definiţie, o serie este convergentă dacă şirul sumelor parţiale este un şir converegent. În cazul nostru, şirul sumelor parţiale este dat de:

$s_n = 1+q+q^2+...+q^n$

Pentru $q=1$, $s_n = n\to\infty$, $n\to\infty$, deci seria nu este convergentă (este divergentă).

Pentru $q=-1$ şirul $s_n$ este şirul alternat 1,0,1,0,1,... care este divergent

Pentru $q\neq 1$, $s_n = 1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ este convergent dacă şi numai dacă $|q|<1$ şi în acest caz $\sum\limits_{n\geq 0} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

**5. Seria armonică**: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ este divergentă

**Demonstraţie**.

Grupăm termenii astfel: $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{2^k+1}+...+\frac{1}{2^k+2^k}\right) > 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}}_{k} = 1+\frac{k+1}{2}$,

adică $s_{2^{k+1}} > 1+\frac{k+1}{2}\to\infty$, $k\to\infty$, deci seria este divergentă deoarece şirul sumelor parţiale nu este mărginit.

**6. Seria armonică generalizată**: $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...,\alpha>0$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha>1$

**Demonstraţie**. Pentru $\alpha>1$ avem $\left(\frac{1}{(2^k)^\alpha}+...+\frac{1}{(2^k+2^k-1)^\alpha}\right) < 2^k\cdot\frac{1}{(2^k)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = q^k$, unde am notat $q=\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, $q\in(0,1)$.

Grupăm:

$$s_{2^{k+1}-1} = 1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+...+\left(\frac{1}{(2^k)^\alpha}+...+\frac{1}{(2^k+2^k-1)^\alpha}\right) < 1+q+q^2+...+q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q}$$

deci şirul $(s_n)_n$ este mărginit deci convergent.

Pentru $\alpha=1$ am văzut deja că seria armonică este divergentă (nemărginită)

Pentru $\alpha<1$ utilizăm: $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\to\infty$, $n\to\infty$ deci seria armonică generalizată este divergentă.

# Tema: criteriile de convergență ale seriilor cu termeni pozitivi

**1.** Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+2^n}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul I de comparație** cu seria geometrică, astfel:

$$\frac{1}{n+2^n}\leq\frac{1}{2^n}$$

Cum seria geometrică $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este convergentă rezultă convergența seriei date.

**2.** Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$, $a>0$, este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul II de comparație** cu seria geometrică. Astfel, pornim de la:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}$$

Ştim că seria $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ este convergentă, iar dacă notăm cu $v_n$ termenul ei general, avem $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}$. Inegalitatea $\frac{a}{n+1}<\frac{1}{2}$ este adevărată pentru $n>2a-1$ aşadar rezultă că $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$ deci seria dată este convergentă.

**3.** Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1+\sqrt{n}}{3n+2}$ este divergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul III de comparație** cu seria armonică generalizată pentru $\alpha=\frac{1}{2}$. Sugestia asupra acestei soluții este dată de diferența puterilor maxime ale lui *n*, la numitor respectiv numărător.

Avem: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{n}}{3n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+n}{3n+2}=\frac{1}{3}$ iar seria armonică generalizată, pentru $\alpha=\frac{1}{2}$, este divergentă

**4.** Seria $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul raportului:** $u_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$, $u_{n+1}=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}$.

Avem $\dfrac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}}=\dfrac{2n+1}{3n+2}\to\dfrac{2}{3}<1$

deci seria este convergentă.

**5.** Seria $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul radical:**

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{2}<1$$

deci seria este convergentă

**6.** Analizați convergența seriei $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)},\alpha>0$

Soluție.

Pornim de la **criteriul Raabe-Duhamel**, pentru termenul general $u_n=\dfrac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$, şi avem:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\dfrac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}}{\dfrac{(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}}-1\right)=n\left(\frac{\alpha+n}{n+1}-1\right)=\frac{(\alpha-1)n}{n+1}\to\alpha-1,$$

deci seria este convergentă pentru $\alpha>2$ şi divergentă pentru $\alpha\in(0,2)$.

Pentru $\alpha=2$ seria este $\sum\dfrac{1}{n+1}$ care este divergentă

## Tema: criteriile de convergență ale seriilor cu termeni oarecare

**1.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{2^n}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm criteriul general al lui **Cauchy**: aplicat şirului sumelor parțiale:

$$\left|s_{n+p}-s_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leq$$

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\leq\frac{1}{2^n}\to 0, n\to\infty,$$

independent de $p$.

**2.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n}{n^3}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm criteriul **Abel-Dirichlet**, $a_n=\frac{1}{n}$, $v_n=\frac{\cos n}{n^2}$; $t_n=\cos 1+\frac{\cos 2}{2^2}+\ldots+\frac{\cos n}{n^2}$ este mărginit deoarece $\left|t_n\right|\leq 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ iar seria armonică generalizată este convergentă pentru $\alpha=2$. În sfârşit, $a_n$ este monoton descrescător şi convergent la 0.

**3.** Calculați $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$

Soluție.

Utilizăm criteriul lui **Leibnitz**, deoarece $a_n=\frac{1}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, deci seria ese convergentă.

Pentru calcul folosim şirul $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ care este convergent; notăm limita cu $x$, aşadar $x_n\to x$.

Calculăm

$$s_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=x_{2n}+\ln 2n-x_n-\ln n\to\ln 2$$

**4.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n+2^n}$ este convergentă

Demonstrație.

Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este convergentă**.

Considerăm seria $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{\sin n}{n+2^n}\right|$; deoarece $\left|\frac{\sin n}{n+2^n}\right|\leq\frac{1}{2^n}$, utilizăm **criteriul I de comparație** cu seria geometrică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$, deci seria este absolut convergentă, prin urmare convergentă.

**5.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}$ este neconditionat convergentă (este convergentă indiferent de ordinea termenilor)

Demonstrație.

Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este neconditionat convergentă**.

Considerăm seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n+n^2}{n^n}$ care este convergentă în virtutea criteriului radical: $\sqrt[n]{\frac{n+n^2}{n^n}}=\frac{\sqrt[n]{n+n^2}}{n}\to 0,\ n\to\infty$

În continuare considerăm $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}\right|$ şi aplicăm **primul criteriu de comparație** folosind $\left|\frac{n+(-1)^n n^2}{n^n}\right|\leq\frac{n+n^2}{n^n}$. În consecință seria este absolut convergentă, deci neconditionat convergentă

**6.** Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!+(-1)^n 2^n}{n^n}$ este absolut convergentă

Demonstrație.

Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ este convergentă în baza criteriului raportului iar seria $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n^n}$ este convergentă în baza criteriului radical, în consecință seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!+2^n}{n^n}$ este convergentă.

Deoarece $\left|\frac{n!+(-1)^n 2^n}{n^n}\right|\leq\frac{n!+2^n}{n^n}$, utilizând **primul criteriu de comparație**, rezultă că seria este absolut convergentă.

**7.** Seria $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\ldots,\ z\in\mathbb{C}$ este absolut convergentă

Demonstrație.

Utilizăm afirmația: **orice serie absolut convergentă este convergentă**.

Pentru seria modulelor utilizăm criteriul raportului $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|z|^n}=\frac{|z|}{n+1}\to 0,\ n\to\infty$.

**Prin definiție**, $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\ldots,\ z\in\mathbb{C}$

**8.** Seria $\sum_{n\geq 1}\cos\frac{1}{n}$, nu este convergentă.

Demonstrație. Observăm că termenul general, $\cos\frac{1}{n}$, nu tinde la zero, aşadar, în baza criteriului de neconvergență, seria dată nu este convergentă.

# Tema: şiruri de funcţii

**1.** Calculaţi limita (simplă) a şirului de funcţii $f_n : [0,1] \to \mathrm{R}, f_n(x) = \dfrac{nx+1}{nx^2+3}$

Soluţie.

Avem $\lim f_n(0) = \dfrac{1}{3}$ iar pentru $x \neq 0$, avem $\lim f_n(x) = \dfrac{1}{x}$

În concluzie, dacă notăm $f:[0,1], f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \end{cases}$, atunci $\lim f_n = f$.

**2.** Arătaţi că şirul de funcţii $f_n : [0,\infty) \to \mathrm{R}, f_n(x) = \dfrac{x+n}{x+n+1}$ este uniform convergent

Soluţie.

Limita simplă (punctuală) a şirului de funcţii este $\lim f_n(x) = 1$; în concluzie, dacă notăm $f : [0,\infty) \to \mathrm{R}, f(x) = 1$, atunci $f_n \xrightarrow{s} f$.

Arătăm că limita este uniformă, iar pentru aceasta observăm că:

$$| f_n(x) - f(x) | = \frac{1}{n+x+1} < \frac{1}{n}, \text{ sau, echivalent, } \sup_x | f_n(x) - f(x) | < \frac{1}{n}$$

Deoarece $\dfrac{1}{n} \to 0, n \to \infty$, independent de *x* rezultă că limita este uniformă.

**3.** Arătaţi că şirul de funcţii $f_n : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ nu este uniform convergent.

Soluţie.

Pentru $x < 0, \lim f_n(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, pentru $x > 0, \lim f_n(x) = \dfrac{\pi}{2}$ şi $\lim f_n(0) = 0$.

În concluzie, dacă notăm $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, x < 0 \\ 0, x = 0 \quad 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, x > 0 \end{cases}$, atunci $f_n \xrightarrow{s} f$.

Utilizăm afirmaţia: **limita uniformă a unui şir de funcţii continue este o funcţie continuă**. Observăm că funcţia *f* nu este continuă deci convergenţa nu poate fi uniformă.

**4.** Arătaţi că şirul de funcţii $f_n : (0,\infty) \to \mathrm{R}, f_n(x) = \dfrac{n}{x+n}$ nu este uniform convergent.

Soluţie.

Şirul este convergent punctual (simplu) la funcţia constantă $f : (0,\infty) \to \mathrm{R}, f(x) = 1$.

Convergenţa depinde însă de *x* deoarece $\left| \dfrac{n}{x+n} - 1 \right| = \dfrac{x}{x+n}$ iar $\dfrac{x}{x+n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left( \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \right) x$. Se observă cu uşurinţă că pentru $\varepsilon$ şi $n_\varepsilon$ date, există $\bar{x} > 0$ astfel încât inegalitatea nu mai este adevărată, respectiv pentru care $n_\varepsilon \leq \left( \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \bar{x}$.

În consecinţă, convergenţa nu este independentă de *x* deci nu este uniformă.

**5.** Calculați $\lim \int_0^1 \frac{1}{n+x^5} dx$

Soluție.

Șirul de funcții $f_n:[0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n+x^5}$ este convergent punctual (simplu) la funcția constantă $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 0$.

Convergența este uniformă deoarece $\left| f_n(x) - f(x) \right| = \frac{1}{n+x^5} \leq \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$, independent de *x*.

Pentru calculul efectiv al limitei din enunțul problemei folosim proprietatea: $\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx$, deci $\lim \int_0^1 \frac{1}{n+x^5} dx = 0$

**6.** Calculați $\lim \int_2^5 e^{-nx^2} dx$

Soluție.

Șirul de funcții $f_n:[2,5] \to \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-nx^2}$ este convergent punctual (simplu) la funcția constantă $f:[2,5] \to \mathbb{R}, f(x) = 0$.

Convergența este uniformă deoarece $\left| f_n(x) - f(x) \right| = e^{-nx^2} \leq e^{-4n} \to 0, n \to \infty$, independent de *x*.

Pentru calculul limitei folosim aceeași proprietate ca la exercițiul anterior, deci $\lim\limits_n \int_2^5 e^{-nx^2} dx = \int_2^5 \lim\limits_n e^{-nx^2} dx = 0$.

Este de remarcat faptul că integrala nu poate fi calculată direct deoarece funcția nu are primitive exprimabile prin funcții elementare.

# Tema: serii de funcții

**1.** Seria de funcții $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$ este uniform convergentă pe $[-1,1]$

Demonstrație.

Utilizăm **criteriul general al lui Cauchy:** $\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+2)!}+\ldots+(-1)^{n+p}\frac{x^{n+p}}{(n+p+1)!}\right|\leq$

$$\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(n+p+1)!}\leq\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2^n}\to 0, n\to\infty,$$

independent de $x\in[-1,1]$ şi independent de $p$ deci seria este uniform absolut convergentă.

**2.** Seria de funcții $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n^2}$ este uniform absolut convergentă pe R

Demonstrație.

Utilizăm criteriul lui **Weierstrass**

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}, \forall x\in \mathrm{R}$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ este convergentă

**3.** Seria de funcții $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ este uniform absolut convergentă pe orice interval de forma $[-r,r], r<1$

Demonstrație.

Utilizăm criteriul lui **Dirichlet**

$|s_n|=|1+x+\ldots+x^n|\leq 1+r+\ldots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}<\frac{1}{1-r}$ deci este mărginit

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ este monoton descrescător şi convergent la 0.

**4.** Seria de funcții $\sum_{n\geq 0}(-1)^n nx^n$ este uniform convergentă pe orice interval de forma $[-r,r], r<1$

Demonstrație.

Utilizăm criteriul lui **Leibnitz** $a_n(x)=nx^n$ este descrescător pentru $x$ fixat, începând de la un rang, $(n+1)x^{n+1}\leq nx^n \Leftrightarrow x\leq\frac{n}{n+1}$, şi anume de îndată ce $r\leq\frac{n}{n+1}$

**5.** Calculați: $1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...,\ x\in(-1,1)$

Soluție.

Arătăm că seria de funcții $1+x+x^2+...+x^n+...$ **poate fi derivată termen cu termen** pe orice interval de forma $[-r,r], r<1$.

Pentru aceasta arătăm că atât aceasta, cât şi seria formată cu derivatele funcțiilor (adică seria dată în enunț) sunt uniform convergente.

Seria $1+x+x^2+...+x^n+...$ este uniform convergentă în baza criteriului lui Weierstrass deoarece $\left| x^n \right| \le r^n$ iar seria geometrică $\sum\limits_{n\ge 0} r^n$ este convergentă pentru $r<1$.

Seria formată cu derivatele funcțiilor, $1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...$ este de asemenea uniform convergentă în baza criteriului lui Weierstrass deoarece $\left|(n+1)x^n\right| \le (n+1)r^n$ iar seria $1+2r+3r^2+...+(n+1)r^n+...$ este convergentă în baza criteriului raportului: $\lim\frac{(n+2)r^{n+1}}{(n+1)n^n}=r<1$.

Pentru calculul efectiv al sumei seriei observăm că suma parțială $s_n(x)=1+x+x^2+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ este uniform convergentă la funcția $\frac{1}{1-x}$, deci suma seriei din enunț se va obține prin derivare,adică: $\frac{1}{(1-x)^2}$

**6.** Calculați: $z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^n}{n}+...,\ z\in[0,1)$

Soluție.

Am văzut deja că seria de funcții $1+x+x^2+...+x^n+...$ este uniform convergentă pe $[0,r], r<1$, în consecință **poate fi integrată termen cu termen** pe orice interval $[0,z], z<1$, aşadar suma seriei este $\int_0^z \frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\Big|_0^z=-\ln(1-z)$

## Tema: mulțimea de convergență a seriilor de puteri

**1.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^3}$

Soluție.

Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard** $\omega=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}}=\lim\frac{n^3}{(n+1)^3}=1$ şi $\rho=\frac{1}{\omega}=1$, deci seria este absolut convergentă pentru $x\in(-1,1)$ şi uniform absolut convergentă pe orice interval $[-r,r]\subset(-1,1)$.

Pentru $x=1$ seria devine $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ care este convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha=3$).

Pentru $x=-1$ seria devine $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3}$ care este absolut convergentă (seria modulelor este exact cea anterioară).

Mulțimea de convergență este $A=[-1,1]$.

**2.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Soluție.

Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard** $\omega=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$ şi $\rho=\frac{1}{\omega}=1$; seria este absolut convergentă pe $(-1,1)$ şi uniform absolut convergentă pe orice interval $[-r,r]\subset(-1,1)$.

Pentru $x=1$ seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha=\frac{1}{2}$).

Pentru $x=-1$ seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ este absolut convergentă în baza criteriului lui Leibnitz ($\frac{1}{\sqrt{n}}$ este monoton descrescător şi convergent la 0).

Mulțimea de convergență este $A=[-1,1)$.

**3.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}$

<u>Soluție</u>.

Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard** $\omega = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\frac{n!}{(n+1)!} = \lim\frac{1}{n+1} = 0$ şi $\rho = \infty$, deci seria este absolut convergentă pentru $x \in \mathrm{R}$ şi uniform absolut convergentă pe orice interval de forma $[-r,r]$.

Mulțimea de convergență este $A = \mathrm{R}$ .

**4.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$

<u>Soluție</u>.

Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard** $\omega = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \infty$ şi $\rho = 0$,

Mulțimea de convergență este $A = \{0\}$.

**5.** Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1} 2^n x^n$

<u>Soluție</u>.

Determinăm raza de convergență utilizând **corolarul teoremei Cauchy Hadamard** $\omega = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ şi $\rho = \frac{1}{2}$. deci seria este absolut convergentă pentru $x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi uniform absolut convergentă pe orice interval de forma $[-r,r] \subset \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Pentru $x = \frac{1}{2}$ seria devine $\sum_{n\geq 1} 1$ care este divergentă.

Pentru $x = -1$ seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ este divergentă

Mulțimea de convergență este $A = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

# Tema: dezvoltarea în serie a funcțiilor

**1.** Dezvoltați în serie, după puterile lui *x*, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x$

Soluție.

Utilizăm dezvoltarea în **serie Taylor**.

Derivatele sunt $f^{(n)}(x)=e^x$ şi sunt mărginite pe orice mulțime $[-r,r]$ deoarece $e^x\le e^r, \forall x\in[-r,r]$ deci funcția se dezvoltă în serie Taylor pe orice mulțime de forma $[-r,r]$, adică pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Avem $f^{(n)}(0)=1$ deci seria Taylor asociată funcției date, pentru $a=0$, este

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

**2.** Dezvoltați în serie, după puterile lui *x*, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$

Soluție.

Utilizăm dezvoltarea în **serie Taylor**.

Derivatele funcției sunt $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$ şi $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$ şi sunt mărginite pe $\mathbb{R}$ deci funcția se dezvoltă în serie Taylor pe $x\in\mathbb{R}$.

Avem $f^{(2k)}(0)=0$ şi $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$ deci seria Taylor asociată pentru $a=0$ este

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\ldots$$

**3.** Dezvoltați în serie, după puterile lui *x*, funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x}$

Soluție.

Utilizăm **seria binomială** pentru $\alpha=-1$: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3\ldots,\ x\in(-1,1)$

**4.** Dezvoltați în serie, după puterile lui $x$, funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x)$

Soluție.

Derivata funcției este $f':(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+x}$ care am văzut că se dezvoltă în serie Taylor după puterile lui $x\in(-1,1)$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3\ldots,$$

pe care o integrăm termen cu termen şi rezultă $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots,\ x\in(-1,1)$.

Pe de altă parte, ştim că $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots=\ln 2$ deci $x\in(-1,1]$

**5.** Dezvoltați în serie, după puterile lui $x$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}x$

Soluție.

Derivata funcției este $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ care se dezvoltă în serie Taylor după puterile lui $x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6\ldots,$$

pe care o integrăm termen cu termen şi rezultă $\operatorname{arctg}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}\ldots,\ x\in(-1,1)$.

Pe de altă parte, $-1\in A$, deci $x\in[-1,1)$ şi conform teoremei a II-a lui Abel:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ldots$$

**6.** Dezvoltați în serie, după puterile lui $x$, funcția $f:\mathbb{R}-\{2,3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

Soluție.

Descompunem $\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}$ şi dezvoltăm fiecare termen folosind seria binomială, astfel:

$$\frac{1}{x-3}=(x-3)^{-1}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{-1}{1!}\left(-\frac{x}{3}\right)+\frac{(-1)(-2)}{2!}\left(-\frac{x}{3}\right)^2+\ldots\right)=-\frac{1}{3}\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{3^n}, x\in(-3,3);$$

Dezvoltarea se poate obține şi pornind de la seria geometrică:

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n\ge 0}\left(\frac{x}{3}\right)^n, x\in(-3,3).$$

Analog, cel de-al doilea termen este:

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{2^n}, x\in(-2,2), \text{ deci}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\sum_{n\ge 0}\left(2^{-n-1}-3^{-n-1}\right)x^n,\ x\in(-2,2)\cap(-3,3)=(-2,2).$$

**7.** Dezvoltați în serie, după puterile lui $x-1$, funcția $f:\left(-\dfrac{3}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{2x+3}$

Soluție.

Punem în evidență factorul $x-1$ astfel încât să putem utiliza dezvoltarea în serie binomială:

$$\sqrt{2x+3}=\sqrt{2(x-1)+5}=\sqrt{5}\left(1+\frac{2}{5}(x-1)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\sqrt{5}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\cdot\frac{2}{5}(x-1)+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{2}{5}(x-1)\right)^n+\ldots\right)=$$

$$\sqrt{5}\left(1+\sum(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!5^n}(x-1)^n\right),\ x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$$

## Tema: derivate parțiale, matrice jacobiană

**1.** Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy + x + y^2 + 5 .$$

Soluție.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 1 , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y , \ J_f(x, y) = (y + 1, x + 2y)$$

**2.** Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) = (x + x^2, 2x + 1).$$

Soluție.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x) = 1 + 2x , \ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) = 2 , \ J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2x \\ 2 \end{pmatrix}$$

**3.** Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul funcției:

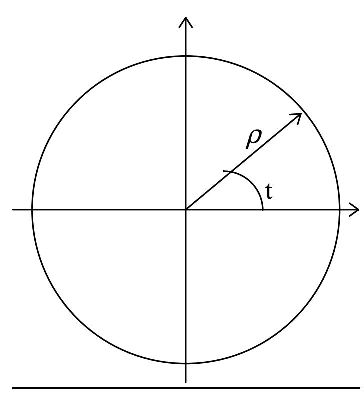
$$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xy, x^2 + y, x \ln y).$$

Soluție.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2x , \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 1 , \quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = \ln y ,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y} , \ J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \\ \ln y & \dfrac{x}{y} \end{pmatrix}$$

**4.** Calculați derivatele parțiale şi Jacobianul parametrizării $\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}$.




Soluție.

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos t , \ \frac{\partial x}{\partial t} = -\rho \sin t , \ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin t , \ \frac{\partial y}{\partial t} = \rho \cos t ,$$

$$J_F = \begin{pmatrix} \cos t & -\rho \sin t \\ \sin t & \rho \cos t \end{pmatrix}$$

**5.** Calculați, folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, derivatele parțiale și Jacobianul compunerii funcțiilor

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x+y, xy, x^2+2xy) \text{ şi}$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y,z) = (xz, y^2+z).$$

Soluție.

Fie $h = g \circ f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, h(x,y) = g(f(x,y))$, folosim formula Jacobianului compunerii de funcții: $J_h(x,y) = J_g(f(x,y)) \cdot J_f(x,y)$.

$$J_g(f(x,y)) = \begin{pmatrix} x^2+2xy & 0 & x+y \\ 0 & 2xy & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix}, \text{ aşadar:}$$

$$J_h = \begin{pmatrix} 3x^2+6xy+4y^2 & 3x^2+4xy \\ 2xy^2+2x+2y & 2x^2y+2x \end{pmatrix}.$$

Derivatele parțiale ale funcției compuse pot fi obținute fie din Jacobian, fie prin calcul, de exemplu:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g_1}{\partial f_1}(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g_1}{\partial f_2}(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g_1}{\partial f_3}(f_1,f_2,f_3)\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) =$$
$$f_3(x,y)\cdot 1 + 0\cdot y + f_1(x,y)\cdot(2x+2y) = x^2+2xy+(x+y)(2x+2y) = 3x^2+6xy+2y^2$$

**6.** Se consideră $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2+y, 2xy)$.

Calculați derivatele parțiale în funcție de parametrii transformării de coordonate polare în plan.

Soluție:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = 2\rho\cos t\cdot\cos t + 1\cdot\sin t = 2\rho\cos^2 t + \sin t,$$

şi analog obținem toate derivatele:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -2\rho^2\sin t\cos t + \rho\sin t,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho} = 4\rho\sin t\cdot\cos t,\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = 2\rho^2\cos 2t$$

**7.** Calculați derivatele parțiale de ordin 2 ale funcției

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x^2z+y, xyz).$$

Soluție:

Derivatele parțiale de ordin I sunt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xz,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = x^2,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = xz,\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = xy$$

iar cel de ordin II se obțin prin derivarea acestora:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2z\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x} = 2x\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} = 2x\,,$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} = 0\,,\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = z\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} = y\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = z\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 0\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} = x\,,$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} = y\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} = x\,,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = 0\,.$$

**8.** Calculați diferențialele de ordin I şi II ale funcției:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y) = x^2 y + y^3\,.$$

<u>Soluție</u>:

Diferențiala de ordin I este

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = 2xydx + \left(x^2 + 3y^2\right)dy$$

iar cea de ordin II este

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2 = 2ydx^2 + 4xdxdy + 6ydy^2$$

**9.** Calculați diferențialele de ordin I şi II ale funcției:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y,z) = xyz + x^2 z + y\,.$$

<u>Soluție</u>:

Diferențiala de ordin I este:

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz =$$

$$(yz + 2xz)dx + (xz + 1)dy + \left(xy + x^2\right)dz$$

iar diferențiala de ordin II este:

$$d^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)dz^2 +$$

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)dzdx =$$

$$2zdx^2 + 2zdxdy + 2xdydz + 2(y + 2x)dzdx$$

## Tema: extremele funcțiilor de mai multe variabile

**1.** Determinați punctele de extrem local ale funcției

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y.$$

Soluție:

Determinăm soluțiile sistemului de ecuații: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$

adică

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$$

sistem simetric având soluțiile $(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)$, care sunt **punctele critice** ale funcției.

Pentru a stabili care dintre aceste puncte este punct de extrem calculăm diferențiala de ordin II:

$$d^2 f(x,y)=6xdx^2+12ydxdx+6xdy^2$$

şi Hessianul

$$\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Pentru $(1,2)$, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1=1>0, \Delta_2=-3<0$ adică nu este nici pozitiv definită nici negativ definită deci punctul nu este de extrem; pentru $(2,1)$, matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1=2>0, \Delta_2=3>0$ adică este pozitiv definită deci punctul este punct de minim local; pentru $(-1,-2)$, matricea $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1=-1<0, \Delta_2=-3<0$ adică nu este nici pozitiv definită nici negativ definită deci punctul nu este de extrem; pentru $(-2,-1)$, matricea $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ are $\Delta_1=-2<0, \Delta_2=3>0$ adică este negativ definită deci punctul este punct de maxim local;

**2.** Determinați punctele de extrem local ale funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y .$$

Soluție:

Determinăm punctele critice rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, \text{ deci } x = 1, y = 0 .$$

Calculăm diferențiala de ordin II a funcției

$$d^2 f(x,y) = 2dx^2 + 2dxdx + 2dy^2 ;$$

Hessianul este $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi are $\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 3 > 0$, deci punctul $(1,0)$ este punct de minim local.

**5.** Arătați că funcția $g : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^2, g(x,y) = \left( \frac{xy+2}{3}, \frac{x^2+y}{4} \right)$ este contracție.

Soluție:

Folosim formula de tip Lagrange:

$$\|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)\|_\infty \le \sup \|g'(u,v)\|_\infty \|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)\|_\infty$$

ceea ce spune că ori de câte ori $\sup \|g'(u,v)\|_\infty < 1$, funcția este contracție (proprietate întâlnită ți în cazul funcțiilor scalare).

Avem

$$g©(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{v}{3} & \frac{u}{3} \\ \frac{x}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ \|g'(u,v)\|_\infty = \max\left\{ \left|\frac{v}{3}\right| + \left|\frac{u}{3}\right|, \left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| \right\}$$

iar

$$\|g'(u,v)\|_\infty \le= \max\left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{4} .$$

Este uşor de observat că $g : ([-1,1] \times [-1,1]) \subseteq [-1,1] \times [-1,1]$ deci funcția $g$ satisface ipotezele de aplicare a principiului contracțiilor.

## Tema: derivatele funcțiilor implcite

**1.** Se consideră sistemul: $\begin{cases} u+v-x-y=0 \\ xu+yv-1=0 \end{cases}$.

Calculați derivatele funcțiilor implicite *u* şi *v*, în raport cu *x* şi *y*.

Soluție: Există trei modalități de calcul.

**I.** Utilizăm teorema funcțiilor implicte, astfel:

Fie $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $X=(x,y)$, $Y=(u,v)$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial X}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ u & v \end{pmatrix},\ \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{y-x}\begin{pmatrix} y & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}=-\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial X}=-\frac{1}{y-x}\begin{pmatrix} y & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{y+u}{y-x} & \frac{y+v}{y-x} \\ \frac{x+u}{x-y} & \frac{x+v}{x-y} \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y+u}{y-x},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y+v}{y-x},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x+u}{x-y},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x+v}{x-y}$$

**II.** Utilizăm determinanții funcționali:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(x,v)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}}=-\frac{-y-u}{y-x}=\frac{y+u}{y-x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,v)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}}=-\frac{-y-v}{y-x}=\frac{y+v}{y-x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,x)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}}=-\frac{u+x}{y-x}=\frac{x+u}{x-y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,y)}}{\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}}=-\frac{v+x}{y-x}=\frac{x+v}{x-y}$$

**III.** Scriem sistemul liniar obținut prin egalarea cu zero a diferențialei fiecărei ecuații din sistem:

$$\begin{cases} du + dv - dx - dy = 0 \\ xdu + ydv + udx + vdy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du + dv = dx + dy \\ xdu + ydv = -udx - vdy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{y+u}{y-x}dx + \dfrac{y+v}{y-x}dy \\ dv = \dfrac{x+u}{x-y}dx + \dfrac{x+v}{x-y}dy \end{cases}$$

**2.** Fie $\cos(x+y+z)+z=0$. Calculați derivatele parțiale ale funcției implicite z, în raport cu *x* și *y*.

Soluție: Notăm cu *f* membrul stâng al ecuației, $f(x,y,z)=\cos(x+y+z)+z$, iar derivatele funcției implicite sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-\sin(x+y+z)}{-\sin(x+y+z)+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-\sin(x+y+z)}{-\sin(x+y+z)+1}$$

**3.** Fie $\begin{cases} y^2 + x + xz = 1 \\ yz - x + z = 4 \end{cases}$. Calculați $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ și $\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

Soluție: Cel mai simplu este să scriem sistemul liniar obținut prin diferențierea fiecărei ecuații: $\begin{cases} (1+z)dx + 2ydy + xdz = 0 \\ -dx + zdy + (y+1)dz = 0 \end{cases}$ pe care îl rezolvăm în raport cu *dz*:

$$\begin{cases} (1+z)dx + 2ydy = -xdz \\ -dx + zdy = -(y+1)dz \end{cases}, \quad \begin{cases} dx = \dfrac{-xz + 2y^2 + 2y}{z^2+z+2y}dz \\ dy = \dfrac{-yz - y - z - x - 1}{z^2+z+2y}dz \end{cases},$$

deci $\dfrac{\partial x}{\partial z} = \dfrac{-xz + 2y^2 + 2y}{z^2+z+2y}$ și $\dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{-yz - y - z - x - 1}{z^2+z+2y}$

**4.** Fie $y + z^2 + 2xy + 3 = 0$. Calculați $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Soluție:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+2x}{2z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1+2x}{2z}\right) = \frac{(1+2x)\cdot 2\frac{\partial z}{\partial y}}{4z^2} = \frac{2(1+2x)\left(-\frac{1+2x}{2z}\right)}{4z^2} = -\frac{(1+2x)^2}{4z^3}$$

## Tema: extreme cu legături

**1.** Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z)=xyz$, având legăturile $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=8 \end{cases}$.

Soluție: Notăm $\varphi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xyz+\lambda_1(x+y+z-5)+\lambda_2(xy+yz+zx-8)$ și

rezolvăm sistemul: $\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=yz+\lambda_1+\lambda_2(y+z)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=xz+\lambda_1+\lambda_2(x+z)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=xy+\lambda_1+\lambda_2(x+y)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}=x+y+z-5=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}=xy+yz+zx-8=0 \end{cases}$

Înmulțim prima ecuație cu *x*, a doua cu *y* și le scădem: $(x-y)(\lambda_1+\lambda_2 z)=0$. Pentru $x=y$ sistemul devine: $\begin{cases} xz+\lambda_1+\lambda_2(x+z)=0 \\ x^2+\lambda_1+2\lambda_2 x=0 \\ 2x+z-5=0 \\ x^2+2xz-8=0 \end{cases}$; din ecuația a 3-a, $z=5-2x$ și ultima ecuație devine $3x^2-10x+8=0$ având soluțiie 2 și $\frac{4}{3}$ Corespunzător, obținem soluțiile complete $x=2, y=2, z=1, \lambda_1=4, \lambda_2=-2$ și $x=\frac{4}{3}, y=\frac{4}{3}, z=\frac{7}{3}, \lambda_1=\frac{16}{9}, \lambda_2=-\frac{4}{3}$

Pentru prima soluție avem $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$rang\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right)=2$, deci $p=2$, $m=3$ adică o singură variabilă independentă, *x* sau *y*.

Diferențialele funcțiilor implicite se obțin din sistemul de legături:

$$\begin{cases} dx+dy+dz=0 \\ 3dx+3dy+4dz=0 \end{cases} \Rightarrow dz=0, dy=-dx;$$

$$d^2\varphi=2[(z+\lambda_2)dxdy+(y+\lambda_2)dxdz+(x+\lambda_2)dydz)]=-2dxdy;$$

Diferențiala de ordin 2 a lui $g$ se va obține exprimând $dy$ și $dz$ în funcție de $dx$: $d^2 g = 2dx^2$ care este pozitiv definită, deci punctul $(2,2,1)$ este punct de minim. Analog se arată că punctul $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ este punct de maxim deoarece în acest caz avem

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix},$$

$$d^2\varphi = 2\left[(z+\lambda_2)dxdy + (y+\lambda_2)dxdz + (x+\lambda_2)dydz)\right] = 2dxdy;$$

$$d^2 g = -2dx^2$$

care este negativ definită.

Datorită simetriei sistemului vom avea încă 4 soluții, corespunzătoare cazurilor $y = z$ și $z = x$.

**2.** Determinați punctele de extrem ale funcției $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, f(x,y) = 6 - 4x - 3y$, având legăturile $x^2 + y^2 = 1$.

Soluție: Notăm $\varphi(x,y,\lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ și rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

având soluțiile $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{5}{2}\right)$ și $\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},-\frac{5}{2}\right)$.

Diferențiala de ordin 2 este $d^2\varphi = 2\lambda\left[dx^2 + dy^2\right]$. Avem o singură legătură, de unde obținem: $xdx + ydy = 0$. Pentru prima soluție, exprimăm $dy = -\frac{4}{3}dx$, deci $d^2 g = \frac{125}{9}dx^2$, adică primul punct este de minim legat. Pentru cea de-a doua soluție avem $d^2 g = -\frac{125}{9}dx^2$ adică maxim legat.

**3.** Determinați punctele de extrem ale funcției $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, f(x,y) = xy$, având legăturile $x + y = 1$.

Soluție: Notăm $\varphi(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$ și rezolvăm sistemul: $\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

având soluția $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Diferențiala de ordin 2 este $d^2\varphi = 2\left[dxdy + dyd\lambda + d\lambda dx\right]$. Avem o singură legătură, de unde obținem: $dx + dy = 0$. deci $d^2 g = -2dx^2$, adică punct de maxim legat.

**A**

1. Sa se determine multimea de convergenta a seriei de puteri: $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x^n}{n^2}$
2. Calculati suma seriei: $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$
3. Calculati matricea *Jacobiana* a functiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x\sin y, y\ln(2x+3y))$
4. Fie $f(x,y)=x(x+y)^2$, $x(t)=3t+1$, $y(t)=\sqrt{t^3+1}$. Calculati derivata $\left(f(x(t),y(t))\right)'$ folosind regula de derivare a functiei compuse.
5. Fie: $\begin{cases} ux-3y+y^2=0 \\ x(u+y)-1=0 \end{cases}$. Calculați derivatele funcțiilor implicite *x* și *y*, în raport cu *u*.
6. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x-1)^2+(y+6)^2$.

**B**

1. Sa se determine multimea de convergenta a seriei de puteri: $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n+2^n}$
2. Calculati suma seriei: $-x+2x^3-3x^5+\ldots+(-1)^n nx^{2n-1}+\ldots$
3. Calculati matricea *Jacobiana* a functiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=\left(\mathrm{tg}(2x+y), \frac{x+y}{x-y}\right)$
4. Fie $f(x,y)=\sqrt{x}(x+3y)$, $x(t)=3+t^2$, $y(t)=(t-2)^3$. Calculati derivata $\left(f(x(t),y(t))\right)'$ folosind regula de derivare a functiei compuse.
5. Fie sistemul: $\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ xy+yz+z-1=0 \end{cases}$. Calculați derivatele funcțiilor implicite *x* și *y*, în raport cu z.
6. Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y+1$.

**C**

1. Sa se determine multimea de convergenta a seriei de puteri: $\sum_{n\geq 1}\frac{5+\sin n}{n!}x^n$
2. Calculati suma seriei: $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^n(n+1)x^n+\ldots$
3. Calculati matricea *Jacobiana* a functiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=\left(\mathrm{arctg}(x^2+y), x^3y\right)$
4. Fie $f(x,y)=\sqrt{x^2+y}$, $x(t)=3\mathrm{tg}t$, $y(t)=(t+1)^3$. Calculati derivata $\left(f(x(t),y(t))\right)'$ folosind regula de derivare a functiei compuse.
5. Fie $t\sin(x)+1=0$. Calculați $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$.
6. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$.

**D**

1. Sa se determine multimea de convergenta a seriei de puteri: $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n\sqrt{n+1}}$
2. Calculati suma seriei: $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$
3. Calculati matricea Jacobiana a functiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=\left(\arcsin(2x+y^2), (x+2y)^3\right)$
4. Fie $f(x,y)=\ln(x^2+y)$, $x(t)=\cos(t+2)$, $y(t)=2t^3$. Calculati derivata $\left(f(x(t),y(t))\right)'$ folosind regula de derivare a functiei compuse.
5. Fie $\sin(x+3y)+2=0$. Calculați $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.
6. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$.

**E**

1. Sa se determine multimea de convergenta a seriei de puteri: $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{3^n+2^n}$
2. Calculati suma seriei: $2x+3x^3+4x^5+\ldots+(n+1)x^{2n-1}+\ldots$
3. Calculati matricea *Jacobiana* a functiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=\left(x\ln y, \frac{x}{x-\sqrt{y}}\right)$
4. Fie $f(x,y)=x(x+y)$, $x(t)=t^2+t$, $y(t)=\cos t$. Calculati derivata $\left(f(x(t),y(t))\right)'$ folosind regula de derivare a functiei compuse.
5. Fie $(x+1)y^2+3=0$. Calculați $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.
6. Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$.

**F**

1. Sa se determine multimea de convergenta a seriei de puteri: $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{n+4}$
2. Calculati suma seriei: $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n+\ldots$
3. Calculati matricea *Jacobiana* a functiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=\left(2^{x+2y}, x\arcsin y\right)$
4. Fie $f(x,y)=\sqrt{x^2+3y}$, $x(t)=3t$, $y(t)=\ln t$. Calculati derivata $\left(f(x(t),y(t))\right)'$ folosind regula de derivare a functiei compuse.
5. Fie $\begin{cases} x^2+xz+2y=1 \\ x+y+3z^2=4 \end{cases}$. Calculați $\frac{\partial x}{\partial z}$ şi $\frac{\partial y}{\partial z}$.
6. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=2x^2+2y^2+2xy+1$.

**G**

1. Sa se determine multimea de convergenta a seriei de puteri: $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$
2. Calculati suma seriei: $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$
3. Calculati matricea *Jacobiana* a functiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=\left(x^2\cos y, y\sqrt{2x+3}\right)$
4. Fie $f(x,y)=x(x^2+y)$, $x(t)=3\cos t$, $y(t)=t^2+t$. Calculati derivata $\left(f(x(t),y(t))\right)'$ folosind regula de derivare a functiei compuse.
5. Fie $\begin{cases} x^2+xz+y=1 \\ 2x-5y+z^2=4 \end{cases}$. Calculați $\frac{\partial x}{\partial z}$ şi $\frac{\partial y}{\partial z}$.
6. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy^2e^{x-y}$.

Studiați convergența seriilor:

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3n + 2^n + 1}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{2 + \sqrt{n+1}}{3+n}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}, a > 0$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{n! + 2^n}{n^n}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}$
7. $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}, \alpha > 0$
8. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n \cdot (n+1)}$
9. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n + 2^n}$
10. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{3n + 5^n}$
11. $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} \cos \frac{1}{n}$
12. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n+1)}{(n+2)^3}$

Determinați mulțimea de convergență a seriilor de puteri:

1. $\sum_{n\geq 1} n! x^n$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2n + n^2 + n^3}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{3 + 2n}}$
4. $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n}\right)^n x^n$
5. $\sum_{n\geq 1} \left(2^n + 3^n\right) x^n$
6. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\sqrt{n+2}}$
7. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\sqrt{2n+1}}$

Studiați convergența șirurilor de funcții:

1. $f_n : (0,\infty) \to \mathrm{R}, f_n(x) = \dfrac{2n}{3n+x}$
2. $f_n : [0,\infty) \to \mathrm{R}, f_n(x) = \dfrac{x+3n}{x+2n+5}$
3. $f_n : (0,1) \to \mathrm{R}, f_n(x) = \dfrac{x-1}{x(x+n)}$
4. $f_n : [0,\infty) \to \mathrm{R}, f_n(x) = \dfrac{x \sin nx}{nx+1}$

Studiați convergența seriilor de funcții:

1. $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ pe $[-1,1]$
2. $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{x^n \cos nx}{n^2}$ pe $(-1,1)$
3. $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{1+x^n} \dfrac{1}{2^n}$ pe $(-1,1)$

Calculați

1. $\lim \displaystyle\int_2^5 e^{-n(x^2+15)} dx$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{4n^2 + x^3} dx$

Dezvoltați în serie, după puterile lui *x*, funcțiile de mai jos, precizând şi mulțimea pe care funcțiile se dezvoltă în serie de puteri.

1. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = \sin x$
2. $f : (-1,\infty) \to \mathrm{R}, f(x) = \ln(1+x)$
3. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = e^x$
4. $f : \mathrm{R} - \{-1\} \to \mathrm{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
5. $f : \mathrm{R} - \{2,3\} \to \mathrm{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$
6. $f : \mathrm{R} - \{1,4\} \to \mathrm{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 4}$
7. $f : \mathrm{R} - \{1,2\} \to \mathrm{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
8. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = \mathrm{arctg} x$

Dezvoltați în serie, după puterile lui $x-1$, funcția $f : \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right) \to \mathrm{R}, f(x) = \sqrt{2x+3}$

Calculați

1. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n n x^n, x\in(-1,1)$
2. $x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n}+...,x\in[0,1)$
3. $1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...,x\in(-1,1)$

Calculați derivatele parțiale de ordin I şi II şi Jacobianul funcțiilor:

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=\left(xe^y z, x+y^2 z\right).$
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=xy+x+y^2+5.$
3. $f:\mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^3, f(x,y)=\left(xy, x^2+y, x\ln y\right).$
4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y)=\left(x^2 z, x-3y, x^2+zy\right)$
5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, f(x)=\left(x+x^2, 2x+1\right).$

Calculați diferențialele de ordin I şi II ale funcțiilor:

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x\ln\left(y^2+2\right)+xy^3.$
2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+1}+zy.$

Determinați punctele de extrem local ale funcțiilor următoare:

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y.$
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y.$
3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+2y^2-2x+1.$
4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y+1.$
5. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+y^2-4x+2y+1.$
6. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+2y^2+2x+1.$

Calculați derivatele funcțiilor implicite rezultate din relațiile date mai jos:

1. $\begin{cases} ux+v-y=0 \\ xu+y+v-1=0 \end{cases};\ \frac{\partial x}{\partial u}$ şi $\frac{\partial y}{\partial v}.$
2. $x\sin(y+z)+xz=0;\ \frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}.$
3. $\begin{cases} x^2+xz+2y=1 \\ x+y+3z^2=4 \end{cases};\ \frac{\partial x}{\partial z}$ şi $\frac{\partial y}{\partial z}.$
4. $x+y^2+2xz+3=0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
5. $(y+z)^2+xy+3=0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
6. $\begin{cases} y^2+x+xz=1 \\ yz-x+z=4 \end{cases};\ \frac{\partial y}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial x}.$
7. $\begin{cases} x^2+y+xz=1 \\ xy-x+z=4 \end{cases};\ \frac{\partial y}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial x}.$
8. $y+x^2+2xyz+3=0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

## Primitiva

**Definiție**. Fie $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.n. primitivă a lui *f* pe *I* dacă *F* este derivabilă pe *I* și $F'(x) = f(x), \forall x \in I$

<u>Notație</u> $F(x) = \int f(x)dx$

<u>Observație</u>. Dacă *F* este primitivă atunci *F+const* este primitivă, notăm $F(x) = \int f(x)dx + const$

**Teoremă** (Darboux). Fie $F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $F'(I)$ este interval

**Consecință**. Dacă *F* este primitivă a lui *f* (se mai spune și că *f* posedă, admite, primitive) atunci *f*, fiind derivata unei funcții, este o funcție cu proprietatea lui Darboux.

**Consecință**. Funcția $f: (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$ nu admite primitive

**Teoremă**. Dacă *f* este continuă atunci *f* admite primitive

**Observație importantă**. Teorema ne permite să afirmăm existența primitivelor pentru funcții ale căror primitive nu se pot exprima prin intermediul funcțiilor elementare, de exemplu $\int e^{-x^2}dx$

**Proprietăți ale primitivei**

1. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$
2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

<u>Observație</u>. Operatorul $\int : V \to W$, V, W spații vectoriale abstracte de funcții, este liniar

3. dacă *f* este continuă și $\varphi$ este derivabilă cu derivata continuă, atunci

$$\left(\int f(x)dx\right)(x) = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)(t) + const, \ x = \varphi(t), \textit{ schimbarea de variabilă}$$

4. dacă *f* și *g* sunt derivabile, cu derivatele continue, atunci

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \textit{ formula de integrare prin părți}$$

## Sume Darboux

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

$\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f$, $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f$

**Definiție** Se numește <u>sumă Darboux inferioară</u>: $s_\Delta = \sum m_i (x_{i+1} - x_i)$

Se numește <u>sumă Darboux superioară</u>: $S_\Delta = \sum M_i (x_{i+1} - x_i)$

**Proprietăți**

- $m(b-a) \le s_\Delta \le S_\Delta \le M(b-a)$
- dacă $\Delta \prec \Delta'$ atunci $s_\Delta \le s_{\Delta'}$
- $s_{\Delta_1} \le S_{\Delta_2}$

**Definiție**. $I_* = \sup s_\Delta$ se numește integrala Darboux inferioară, $I^* = \inf S_\Delta$ se numește integrala Darboux superioară, *f* se numește **integrabilă în sens Darboux dacă** $I_* = I^*$

**Teoremă**. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită, atunci

*f* este integrabilă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall \|\Delta\| < \delta_\varepsilon, S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$

**Teoremă**. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monotonă, atunci *f* este integrabilă Darboux

**Teoremă**. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă, atunci *f* este integrabilă Darboux

## Integrabilitate în sens Riemann

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ; $\Delta = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$ și $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$;

**Definiție**. $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum\limits_{i=0\ldots n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ se numește **sumă Riemann** asociată funcției *f*, divizunii $\Delta$ și punctelor intermediare, $\xi$

**Definiție**. *f* s.n. integrabilă Riemann dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon, \forall \|\Delta\| < \delta_\varepsilon, |\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon$. Numărul *I* se numește integrala Riemann a funcției *f* pe intervalul $[a, b]$

**Teoremă**. Dacă *f* este integrabilă Riemann atunci este mărginită

**Lemă**. $\inf\limits_{\xi} \sigma_\Delta(f, \xi) = s_\Delta$, $\sup\limits_{\xi} \sigma_\Delta(f, \xi) = S_\Delta$

**Teoremă** Dacă *f* este mărginită, atunci este integrabilă Darboux $\Leftrightarrow$ este integrabilă Riemann

**Teoremă** Dacă *f* este mărginită, atunci este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow \forall \|\Delta_n\| \to 0 \Rightarrow \lim \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = I$

**Definiție** Mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ s.n. neglijabilă dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \{I_n\}_{n \in J}, A \subseteq \bigcup\limits_{n \in J} I_n, \sum\limits_{n \in J} l(I_n) < \varepsilon$

**Teoremă**. *f* este integrabilă $\Leftrightarrow$ mulțimea punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă

## Proprietăți ale integralei Riemann

1. $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$

2. dacă *f* și *g* integrabile atunci $\alpha f + \beta g$ și $f \cdot g$ integrabile și $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

3. a) $f \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$ ; b) $f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ ; c) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

4. Prima formulă de medie:

dacă $m \le f(x) \le M$ și g păstrează semn constant, atunci $\exists \mu, \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$

dacă *f* este continuă, atunci $\exists \xi, \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

5. A doua formulă de medie:

dacă *f* continuă iar *g* continuă și monotonă, atunci $\exists \xi, \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$

6. Dacă *f* integrabilă pe $[a,b]$ atunci este integrabilă pe orice subinterval și $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

7. *f,g* integrabile, $f(x) = g(x), \forall x \in [a,b] - A$, *A* finită, atunci $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

8. *f* continuă, atunci $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este primitivă a lui *f*

## Formula Leibnitz-Newton

Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă și dacă admite o primitivă *F*, atunci $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

**Integrale pe interval necompact (improprii, generalizate)**

**Definiție**. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabilă pe orice $[a,u]\subset[a,b)$, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este **convergentă** dacă $\exists\lim_{u\to b}\int_a^u f(x)dx=l\in\mathbb{R}$; în acest caz punem $\int_a^b f(x)dx=l$. În caz contrar integrala este divergentă.

**Teoremă**. $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon, a<\delta_\varepsilon<b, \left|\int_u^v f(x)dx\right|<\varepsilon, \forall u,v,\delta_\varepsilon<u<v<b$

**Observație**. Dacă $f$ are limită în $b$, iar $b$ este finit, atunci integrala este convergentă și coincide cu integrala prelungirii prin continuitate a funcției $f$.

**Teoremă** (Criteriul de comparație). Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}_+$ $f(x)\le g(x),\forall x\in[a,b)$, atunci

$$\int_a^b g(x)dx \text{ convergentă} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ convergentă}$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ divergentă} \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ divergentă}$$

**Teoremă**. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$, atunci

Dacă $\exists\alpha>1,\lim_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=l$ (finit), atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă

Dacă $\exists\alpha\le1,\lim_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=l$ (nenul), atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă

**Teoremă**. Fie $f:(a,b]\to\mathbb{R}_+$, atunci

Dacă $\exists\alpha<1,\lim_{x\downarrow a}(x-a)^\alpha f(x)=l$ (finit), atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă

Dacă $\exists\alpha\ge1,\lim_{x\downarrow a}(x-a)^\alpha f(x)=l$ (nenul), atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă

**Teoremă**. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}_+$, atunci

Dacă $\exists\alpha<1,\lim_{x\uparrow b}(b-x)^\alpha f(x)=l$ (finit), atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă

Dacă $\exists\alpha\ge1,\lim_{x\uparrow b}(b-x)^\alpha f(x)=l$ (nenul), atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă

**Teoremă** (Dirichlet). Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ continuă și $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ mărginită, iar $g:[a,b)\to\mathbb{R}_+$ descrescătoare și $\lim_{x\to b}g(x)=0$, atunci $\int_a^b f(x)g(x)dx$ este convergentă.

**Definiție**. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă dacă $\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă.

**Lemă**. Dacă $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

**Teoremă** (Criteriul integral al lui Cauchy). Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}_+$ descrescătoare, atunci $\int_1^\infty f(x)dx$ are aceeași natură (convergentă sau divergentă) cu seria $\sum_{n\ge1}f(n)$.

## Integrale cu parametru pe interval compact

**Definiție**. Fie $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$. Dacă funcția $x\to f(x,t):[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pentru orice $t\in[c,d]$, atunci $I(t)=\int_a^b f(x,t)dx,\ t\in[c,d]$ se numește integrală cu parametru.

Un caz mai general este reprezentat de: $I(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$, unde $\alpha,\beta:[c,d]\to[a,b]$.

**Teorema de continuitate**. Dacă $f$, $\alpha$ și $\beta$ sunt funcții continue, atunci $I$ este funcție continuă.

**Teorema de derivabilitate**. Dacă $f$ și $\frac{\partial f}{\partial t}$ sunt continue, iar $\alpha$ și $\beta$ sunt derivabile, atunci $I$ derivabilă și:

$$I'(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx+\beta'(t)f(\beta(t),t)-\alpha'(t)f(\alpha(t),t)$$

**Teorema de integrare**. Dacă $f$ continuă atunci:

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)dx\right)dt=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)dt\right)dx$$

## Integrale cu parametru pe interval necompact

Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$, $b$ finit sau infinit

**Definiție**. $I(t)=\int_a^b f(x,t)dx$ se numește simplu convergentă dacă

$$\forall t\in[c,d],\forall\varepsilon>0,\exists\delta_{\varepsilon,t},a<\delta_\varepsilon<b,\ \left|\int_u^v f(x,t)dx\right|<\varepsilon,\forall u,v:\delta_{\varepsilon,t}<u<v<b$$

**Definiție**. $I(t)=\int_a^b f(x,t)dx$ se numește uniform convergentă dacă

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon,\ a<\delta_\varepsilon<b,\ \left|\int_u^v f(x,t)dx\right|<\varepsilon,\forall u,v:\delta_\varepsilon<u<v<b,\forall t\in[c,d]$$

**Teoremă** (criteriul de dominare uniformă). Dacă $|f(x,t)|\le\varphi(x),\forall x\in[a,b),\forall t\in[c,d]$ și $\int_a^b\varphi(x)dx$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x,t)dx$ este uniform și absolut convergentă

**Teorema de continuitate**. Dacă $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este continuă și $\int_a^b f(x,t)dx$ este uniform convergentă, atunci $I(t)=\int_a^b f(x,t)dx$ este continuă

**Teorema de derivabilitate**. Dacă $f,\frac{\partial f}{\partial t}:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ sunt continue iar $\int_a^b f(x,t)dx$ și $\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ sunt uniform converge, atunci există $I'(t)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$. Dacă $b$ este finit, atunci ipoteza de uniform convergență pentru $\int_a^b f(x,t)dx$ poate fi slăbită la convergență simplă.

**Teorema de integrare**. Dacă $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este continuă și $\int_a^b f(x,t)dx$ este uniform convergentă, atunci $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)dx\right)dt=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)dt\right)dx$

**Observație**. Rezultatele rămân adevărate și pentru $t\in[c,\infty)$

**Integrala lui Dirichlet**: $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

**Integrala Poisson:** $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

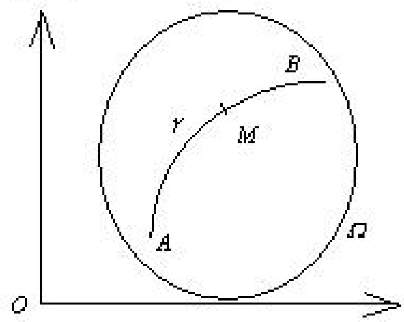
**Funcția** $\Gamma$ (Euler de speța a II-a) $\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,\ a>0$

**Funcția** $\beta$ (Euler de speța a I-a) $\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\ a,b>0$

## Drumuri

**Definiție**. $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $r:[a,b] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(y))$, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $(I, \vec{r})$ s.n. **drum parametrizat**

- dacă $r$ este injectiv drumul s.n. **simplu**
- dacă $x, y \in C^1([a,b])$ și $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0, \forall t \in [a,b]$ drumul s.n. **neted**




**Teoremă**. Dacă un drum este simplu și neted atunci are lungime (este rectificabil) iar lungimea sa este:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

## Reprezentarea normală a unui drum parametrizat

Fie $t \in [a,b], \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}du$, reprezină lungimea arcului $AM$, și considerăm $\lambda:[a,b] \to [0, L]$.

Funcția $\lambda$ are următoarele proprietăți:

- este bijectivă, deci există $\lambda^{-1}:[0, L] \to [a, b]$
- este derivabilă și $\lambda'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$

Punem $\rho = r \circ \lambda^{-1}$ și $\rho(s) = (\varphi(s), \psi(s))$; pentru $s = \lambda(t) \Rightarrow t = \lambda^{-1}(s)$, $\rho(s) = r(\lambda^{-1}(s))$, $\varphi(s) = x(\lambda^{-1}(s))$, $\psi(s) = y(\lambda^{-1}(s))$, $\varphi(\lambda(t)) = x(t)$, $\psi(\lambda(t)) = y(t)$; notăm $J = [0, L]$

**Definiție**. $(J, \vec{\rho})$ se numește reprezentarea normală a drumului $(I, \vec{r})$

## Drumuri echivalente

**Definiție**. $(I, r), (I_1, r_1)$ se numesc echivalente dacă există $\alpha: I \to I_1$, difeomorfism crescător astfel încât

$$r(t) = r_1(\alpha(t)), \forall t \in I$$

**Propoziție**. Relația introdusă de definiția anterioară este o relație de echivalență

**Definiție**. Se numește curbă o clasă de drumuri echivalente

- Un drum se consideră orientat în sensul creșterii parametrului
- Arcul $AB = \gamma$ se numește suportul drumului

**Definiție**. Fie drumurile $([a,b], \vec{r}_1), ([b,c], \vec{r}_2)$ și $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(b)$; drumul $\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{r}_1(t), t \in [a,b] \\ \vec{r}_2(t), t \in [b,c] \end{cases}$ este drumul obținut prin **juxtapunerea** drumurilor. Curba (clasa) obținută se numește juxtapunerea curbelor.

## Integrala curbilinie de speța a I-a

**Definiție**. Fie $\gamma \subset \Omega, F: \Omega \to \mathbb{R}$. Numim integrală curbilinie de speța a I-a:

$$\int_\gamma F(x,y)ds = \int_0^L F(\varphi(s), \psi(s))ds$$

**Teoremă**. Dacă $F$ este continuă, atunci există integrala curbilinie de speța a I-a și:

$$\int_\gamma F(x,y)ds = \int_a^b F(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

**Teoremă**. Valoarea integralei curbilinii de speța a I-a nu depinde de alegerea unui **drum echivalent**.

**Teoremă**. Valoarea integralei curbilinii de speța a I-a nu depinde de sensul de parcurgere al curbei.

**Teoremă**. $\int_\gamma F(x,y)ds = \int_{\gamma_1} F(x,y)ds + \int_{\gamma_2} F(x,y)ds$

## Integrala curbilinie de speța a II-a

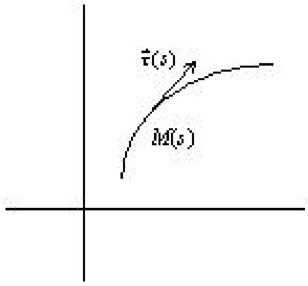
Fie $I=[a,b]\xrightarrow{\gamma}\mathbb{R}^2, r(t)=(x(t),y(t))$ un drum și $J=[0,L]\xrightarrow{\rho}\mathbb{R}^2, \rho(s)=(\varphi(s),\psi(s))$ reprezentarea sa normală:

$$\varphi(s)=x(\lambda^{-1}(s)), \psi(s)=y(\lambda^{-1}(s))$$

$$\varphi(\lambda(t))=x(t)\,,\ \psi(\lambda(t))=y(t)$$

$$\varphi'(\lambda(t))\lambda'(t)=x'(t)\,,\ \varphi'(\lambda(t))=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}$$

$$\psi'(\lambda(t))\lambda'(t)=y'(t)\,,\ \psi'(\lambda(t))=\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}},$$




$\left[\varphi'(\lambda(t))\right]^2+\left[\varphi'(\lambda(t))\right]^2=1$, $\vec{\tau}(s)=\varphi'(s)\vec{i}+\psi'(s)\vec{j}$, $\|\vec{\tau}(s)\|=1$, $\vec{\tau}(s)$ este <u>versorul tangentei</u> la curba γ în $M(s)$

**Definiție**. Fie $\gamma\subset\Omega\subset\mathbb{R}^2, \gamma$ având reprezentantul $(I,\vec{r})$ simplu și neted, $F:\Omega\to\mathbb{R}^2$. $F(x,y)=\left(P(x,y),Q(x,y)\right)$.
Numim integrală curbilinie de speța a II-a:

$$\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_0^L \vec{F}(\rho(s))\cdot\vec{\tau}(s)ds=\int_0^L\left(P(\varphi(s),\psi(s))\varphi'(s)+Q(\varphi(s),\psi(s))\psi'(s)\right)ds$$

**Teoremă** Dacă $P$ și $Q$ sunt continue atunci există integrala de speța a II-a și:

$$\boxed{\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\left(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt}$$

**Teoremă.** Integrala curbilinie de speța a II-a nu depinde de alegerea reprezentantului curbei

**Teoremă** $\int_{AB}\omega=-\int_{BA}\omega$ (integrala își schimbă semnul o dată cu schimbarea sensului de parcurgere al curbei)

**Teoremă** $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega$, unde prin $\gamma_1\cup\gamma_2$ am notat juxtapunerea curbelor $\gamma_1$ și $\gamma_2$

**Definiție**. Aplicația $\omega:\Omega\to L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}), \omega(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ se numește formă diferențială de ordin I.
**Definiție**. Forma diferențială $\omega$ se numește exactă dacă este diferențiala de ordin I a unei funcții, adică există

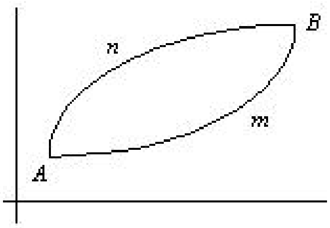
$f:\Omega\to\mathbb{R}$ a.î. $P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ (adică $\omega=\mathrm{d}f$)

**Teoremă**. Dacă este Ω o mulțime cu proprietatea conului, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $\int_{AB}\omega$ nu depinde de curba $AB$ (conținută în Ω) ci numai de capetele $A$ și $B$

ii) $\omega$ este exactă

iii) $\int_\gamma\omega=0,\ \forall\gamma\subset\Omega$, curbă închisă și netedă pe porțiuni



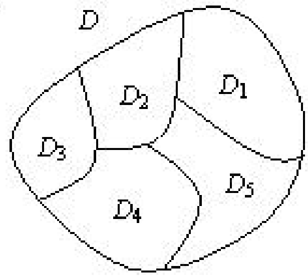

**Definiție**. Forma diferențială $\omega$ se numește închisă dacă $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

<u>Observație</u>. Dacă $\omega$ este exactă (adică este diferențiala de ordin I a unei funcții $f$) și $P$, $Q$ sunt de clasă $C^1$, atunci conform teoremei lui Schwartz, aplicată lui $f$, avem: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Reciproca este conținută în teorema următoare:

**Teoremă** Fie $\omega$ de clasă $C^1$ în Ω, atunci $\omega$ este exactă dacă și numai dacă este închisă.

## Construcția integralei duble

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu (conex și deschis) mărginit, având frontiera curbă netedă pe porțiuni.




Noțiuni: Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ mărginită, $diam(A) = \sup\{\|x - y\|; x, y \in A\}$

Se numește partiție a lui $D$ o familie $\rho = (D_i)_{i=\overline{1,n}}$ a.î: $\overline{D} \subseteq \cup \overline{D_i}, D_i \cap D_j = \varnothing, i \neq j$

Numărul $\|\rho\| = \sup diam(D_i)$ se numește norma partiției

Fie $f: \overline{D} \to \mathbb{R}$, mărginită

$m_i = \inf\{f(x,y); (x,y) \in \overline{D_i}\}$, $M_i = \sup\{f(x,y); (x,y) \in \overline{D_i}\}$

$s_\rho = \sum_{i=\overline{1,n}} m_i \cdot aria(D_i)$ se numește *suma Darboux inferioară* a funcției *f*, relativ la partiția $\rho$

$S_\rho = \sum_{i=\overline{1,n}} M_i \cdot aria(D_i)$ se numește *suma Darboux superioară* a funcției *f*, relativ la partiția $\rho$.

$I_* = \sup s_\rho$ se numește *integrala Darboux inferioară*

$I^* = \inf S_\rho$ se numește *integrala Darboux superioară*

**Definiție**. Dacă $I_* = I^*$ atunci spunem că *f* este *integrabilă în sens Darboux*, valoarea comună se numește inegrala dublă a funcției *f* pe domeniul *D* și se notează: $I = I_* = I^* = \iint_D f(x,y)dxdy$

**Teoremă**. Funcția *f* este integrabilă (Darboux) dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall \rho, \|\rho\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_\rho - s_\rho < \varepsilon$$

**Teoremă** Dacă *f* este continuă, atunci este integrabilă (Darboux)

**Definiție**. Se numește *sumă Riemann* a funcției *f* relativă (corespunzătoare) partiției $\rho$ și alegerii punctelor $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, expresia: $\sigma_\rho = \sum_{i=\overline{1,n}} f(\xi_i, \eta_i) \cdot aria(D_i)$

**Definiție**. Spunem că *f* este *integrabilă în sens Riemann* dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ și $\forall \rho, \|\rho\| < \delta_\varepsilon$, $\forall (\xi_i, \eta_i) \Rightarrow \left|\sigma_\rho - I\right| < \varepsilon$

**Teoremă**. Funcția mărginită *f* este integrabilă Darboux dacă și numai dacă este integrabilă Riemann

**Teoremă**. Funcția *f* este integrabilă dacă și numai dacă $\forall \|\rho_n\| \to 0$, $\forall (\xi_i^n, \eta_i^n) \Rightarrow \lim \sigma_{\rho_n} = I$

## Proprietățile integralei duble

1. $\iint_D 1 \cdot dxdy = aria(D)$
2. $\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy$
3. $f(x,y) \le g(x,y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$
4. $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy$
5. $\exists \mu \in [m, M]$, $\iint_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot aria(D)$

5'. dacă *f* continuă, atunci $\exists (\xi, \eta) \in D$, $\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi, \eta) aria(D)$

6. dacă $\overline{D} = \overline{D_1} \cup \overline{D_2}, D_1 \cap D_2 = \varnothing \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$

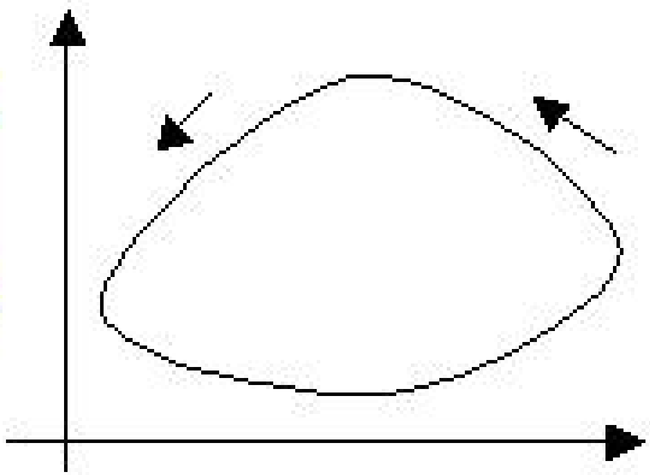
**Formula lui Green**

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu având frontiera curbă închisă, simplă, netedă pe porțiuni.

Fie $P, Q: \overline{D} \to \mathbb{R}$ continue a.î. $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}: \overline{D} \to \mathbb{R}$ există și sunt continue.

Atunci:

$$\boxed{\oint_{Fr(D)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}$$



**Corolar** $\boxed{Aria(D) = \dfrac{1}{2} \oint_{Fr(D)} xdy - ydx}$

## Schimbarea de variabilă în integrala dublă

Considerăm $F$ un difeomorfism de clasă $C^2$, $F:\Delta \to D$, unde $\Delta, D \subset \mathbb{R}^2$, $D$ cu frontieră simplă, închisă, netedă pe porțiuni. Notăm componentele lui $F$ cu $x$, respectiv $y$:

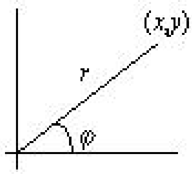
$$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v)),\ x = x(u,v),\ y = y(u,v).$$

Fie $f:\overline{D} \to \mathbb{R}$, continuă. Presupunem că $\Delta = F^{-1}(D)$ are proprietatea că $F(Fr(\Delta)) = Fr(D)$, atunci:

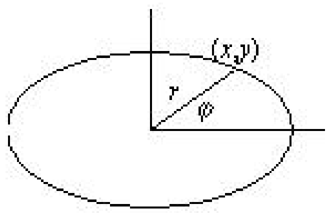
$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right|dudv}$$

unde $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right| = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}$

**Coordonate polare:** $\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}$, $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$




**Coordonate polare generalizate (pe elipsă):** $\begin{matrix} x = ra\cos\varphi \\ y = rb\sin\varphi \end{matrix}$, $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ra\sin\varphi \\ b\sin\varphi & rb\cos\varphi \end{vmatrix} = abr$



## Modul de calcul al integralei triple

**Definiție** Domeniul $\Omega$ este simplu în raport cu $Oz$ dacă există $D \subset \mathbb{R}^2$ și $\varphi, \psi: D \to \mathbb{R}$ continue astfel încât:

$$\Omega = \{(x, y, z) | \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y), (x, y) \in D\}$$

**Teoremă**. Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continuă și $\Omega$ simplu în raport cu $Oz$, atunci:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \iint_D \left( \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy$$

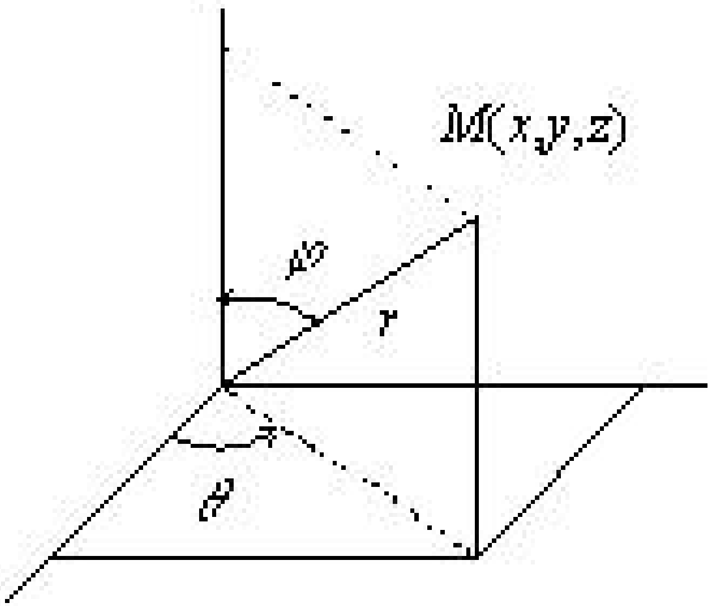
## Schimbarea de variabilă în integrala triplă

Fie $\Delta \ni (u, v, w) \to (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \Omega$, o transformare regulată în $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \iiint_\Delta f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}(u, v, w) \right| dudvdw$$

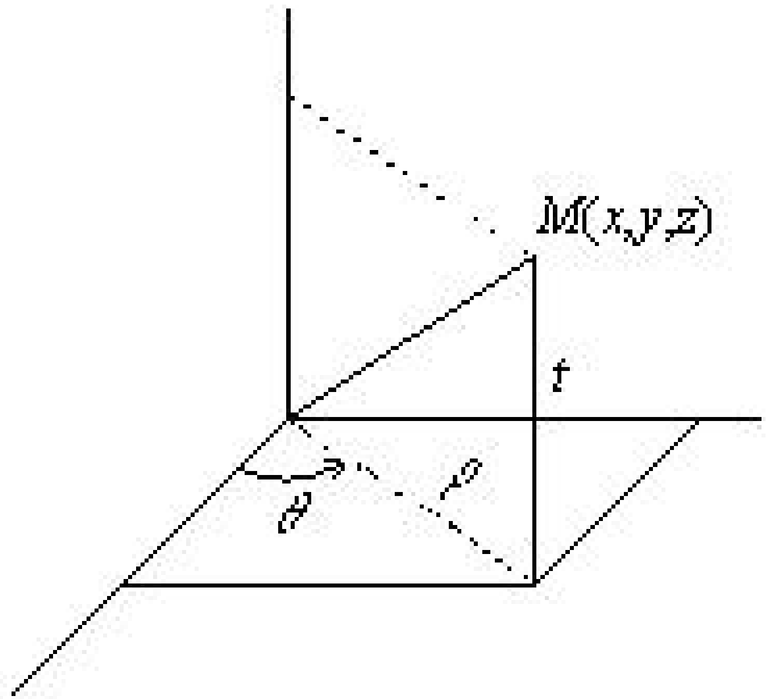
## Coordonate sferice

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\,,\ r \geq 0,\ \varphi \in [0,\pi],\ \theta \in [0,2\pi], \\ \ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$$

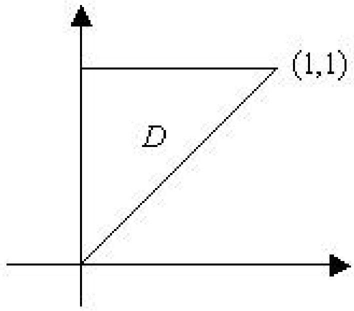


**Coordonate cilindrice**

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta,\ \ \rho\geq 0,\theta\in[0,2\pi],t\in\mathbb{R},\ \ \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,t)}=\rho$$
$$z=t$$



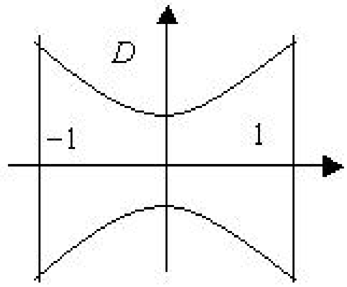
**Exercițiu**. $\iint_D (x+y)dxdy$ unde $D$ este domeniul din figură.




Soluție. Domeniul este simplu în raport cu ambele axe astfel încât putem calcula integrala în două moduri, ambele utilizând ecuația primei bisectoare, $y = x$.

$$\int_0^1\left(\int_x^1 (x+y)dy\right)dx = \int_0^1\left(x(1-x)+\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^1\left(-\frac{3x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1\left(\int_0^y (x+y)dx\right)dy = \int_0^1\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy = \int_0^1\frac{3y^2}{2}dy = \frac{1}{2}$$

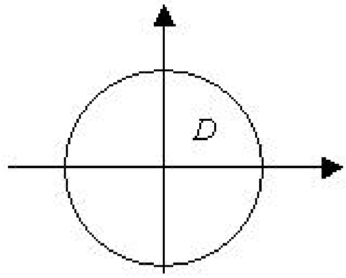



**Exercițiu**. Să se calculeze aria domeniului din figură, mărginit de hiperbola $y^2 - x^2 = 1$ și dreptele $x = -1$ și $x = 1$.

Soluție. Avem de calculat $\iint_D dxdy$ și deoarece domeniul este simplu în raport cu $Oy$, avem:

$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dy = 2\int_{-1}^1\sqrt{1+x^2}\,dx = \left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\Big|_{-1}^{1} = 2\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

**Exercițiu**. $\iint_D xdxdy$ unde $D$ este sfertul discului de rază 1 situat în primul cadran.

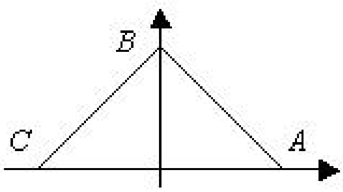



Soluție. Domeniul este simplu în raport cu ambele axe astfel încât putem calcula integrala în două moduri, ambele utilizând ecuația cercului: $x^2 + y^2 = 1$.

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xdy = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

**Exercițiu**. $\iint_D xy^2dxdy$ unde $D$ este triunghiul $ABC$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$.

Soluție. Domeniul este simplu în raport cu ambele axe astfel încât integrala se poate calcula în două moduri. Considerând domeniul simplu în raport cu $Ox$ avem:

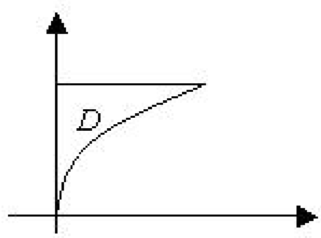



$$\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y} xy^2dx = \int_0^1 y^2\,\frac{x^2}{2}\Big|_{y-1}^{1-y}dy = 0$$

**Exercițiu**. $\iint_D ye^x dxdy$ unde $D$ este domeniul mărginit de dreptele $x = 0$, $y = 1$ și parabola $y^2 = x$.

Soluție. Considerăm domeniul simplu în raport cu $Ox$, deci:

$$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} ye^x dx = \int_0^1 y\left(e^{y^2}-1\right)dx = \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1 - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-2}{2}$$



## Aplicații elementare ale integralei definite

**Lungimea graficului**, $f \in C^1([a,b])$

$$L(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

**Aria** cuprinsă între graficul funcției continue $f:[a,b] \to \mathbb{R}_+$, $Ox$, $x=a$ și $y=b$:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

**Volumul** obținut prin rotația graficului funcției $f:[a,b] \to \mathbb{R}_+$ în jurul lui $Ox$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

**Aria laterală** a suprafeței de rotație în jurul lui $Ox$, $f \in C^1([a,b])$ :

$$A_l = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

**Centrul de greutate** al unei plăci omogene cuprinse între graficele funcțiilor $f$ și $g$, $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $f$, $g$ continue:

$$x_G = \frac{\int_a^b x\left(g(x) - f(x)\right)dx}{\int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)dx}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right)dx}{\int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)dx}$$

**Lucrul mecanic**, efectuat de forța $f$ pentru a deplasa o particulă din $a$ în $b$:

$$L_M = \int_a^b f(x)\,dx$$

## Integrale improprii şi integrale cu parametrii

Integrala Poisson: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Integrala Dirichlet: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Integrala Euler de speţa a I-a (funcţia beta): $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\ a,b>0$

Proprietăţi:

$$\beta(a,b) = \beta(b,a)$$

$$\beta(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\beta(a,b-1)$$

$$\beta(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}\beta(a-1,b)$$

$$\beta(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!},\ n,m \in \mathbb{N}^*$$

Integrala Euler de speţa a II-a (funcţia gamma): $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,\ a>0$

Proprietăţi:

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\ \Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\lim_{a\to 0}\Gamma(a) = \infty$$

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

## Aplicații ale integralelor curbilinii

Integrala curbilinie de speța a I-a: $\int_{\gamma} F(x,y,z)ds = \int_{a}^{b} F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$

Lungimea curbei:

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds$$

Masa unui fir neomogen de densitate $\rho$ (sau sarcina electrică totală):

$$\int_{\gamma} \rho(x,y,z)ds$$

Momentul de inerție în raport cu $M(x_0, y_0)$:

$$\int_{\gamma} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]ds$$

Centrul de greutate ale unui fir material omogen:

$$x_G = \frac{\int_{\gamma} x ds}{L(\gamma)},\ y_G = \frac{\int_{\gamma} y ds}{L(\gamma)},\ z_G = \frac{\int_{\gamma} z ds}{L(\gamma)}$$

Integrala curbilinie de speța a II-a:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{a}^{b} \{P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\}dt$$

Lucrul mecanic efectuat de forța $F = (P,Q,R)$ în lungul curbei $\gamma$:

$$L = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

Aria mărginită de curba închisă $\gamma$:

$$Aria = \frac{1}{2}\int xdy - ydx$$